建筑结构

流固耦合作用下鞍形薄膜结构非线性动力特性

Nonlinear Dynamic Characteristics of Hyperbolic Parabolic Membrane Structure under Fluid - structure Coupling

吴孟瑶[1]，宋维举[1,2,3]

（1. 河北工程大学 土木工程学院，邯郸 056038；2. 天津大学 建筑工程学院，天津 300072；
3. 华恒建设集团有限公司，宁波 315012）

摘　要：膜材是一种新型建筑材料，具有自重轻和跨度大等特点。在风荷载的作用下，膜材容易出现显著的形变和振动，可能会与周围空气流场形成“耦合效应”，严重时会导致结构失稳，进而威胁到建筑物的安全。为解决上述问题，基于冯卡门大挠度理论和达朗贝尔原理，推导了流固耦合效应下鞍形薄膜结构强非线性振动的控制方程，利用伽辽金法获得解析，分析流固耦合作用下风速、振型阶数、膜面密度、初始位移、预应力、膜面尺寸和矢跨比等参数，均对鞍形薄膜结构振动特性产生不同程度的影响，进而总结正交异性张拉膜结构在流固耦合作用下强非线性振动的一般规律，为相关领域的研究与应用提供理论支撑与参考依据。

关键词：薄膜结构；正交异性；流固耦合；非线性振动
中图分类号：TU33　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-8249（2025）01-0105-08
DOI:10.19860/j.cnki.issn1005-8249.2025.01.020

WU Mengyao[1]，SONG Weiju[1,2,3]

（1. School of Civil Engineering，Hebei University of Engineering，Handan 056038，China；
2. School of Civil Engineering，Tianjin University，Tianjin 300072，China；
3. Huaheng Construction Group Co.，Ltd.，Ningbo 315012，China）

Abstract：Membrane material is a new type of building material，which has the characteristics of light weight and large span. Under the action of wind load，the membrane material is prone to significant deformation and vibration，which may have a "coupling effect" with the surrounding air flow field，and in severe cases，it will lead to structural instability，thus threatening the safety of buildings. In this paper，based on von Karman' s large deflection theory and d ' Alembert' s principle，the governing equations of strong nonlinear vibration of saddle - shaped membrane structures under fluid - structure coupling effect are derived，and the analytical solutions are obtained by Galerkin method. The parameters such as wind speed，mode order，membrane surface density，initial displacement，prestress，membrane surface size and vector - span ratio under fluid - solid coupling are analyzed，and all have different influences on the vibration characteristics of saddle - shaped membrane structures. Then，the general law of strong nonlinear vibration of orthotropic tension membrane structures under fluid - solid coupling is summarized，which provides theoretical support and reference for research and application in related fields.

Key words：membrane structure；orthotropy；fluid - structure coupling；nonlinear vibration

---

基金项目：河北省自然科学基金（E2020402061）。
作者简介：吴孟瑶（1997—），女，硕士研究生，研究方向：大跨空间结构。
通信作者：宋维举（1986—），男，博士，副教授，研究方向：大跨空间结构。
收稿日期：2023-08-27

建筑结构

0　引言

膜结构是一种新型的建筑结构，具有重量轻、跨度大等优点，在建筑工程领域被广泛应用。在工程实践中，常采用正交各向异性织物膜材设计成空间曲面形状（伞形和鞍形）的屋顶或穹顶结构。膜材为柔性材料，其相对刚度较低，致使其动力特性表现出较强的几何非线性特征。加之薄膜结构自重较轻、自振频率低，在外部激励下易发生振动与变形。当风荷载作用于薄膜结构时，该结构表现出极强的敏感性，极易与周围流场产生“耦合效应”。一旦风速达到某个阈值，结构就会出现明显的失稳现象，进而可能导致建筑物出现安全问题。因此，深入探究薄膜结构在几何非线性的特点和流固耦合效应影响下的表现，对薄膜结构的设计优化和安全使用具有重要意义。

近年来，人工智能等前沿新兴技术持续创新并广泛应用，薄膜结构的研究也日益深入，在理论探索、实验研究和工程应用等方面都取得了重要进展，为薄膜结构在建筑及多行业的进一步拓展与提升奠定了坚实基础。

Liu 等[1-2]利用 L–P 摄动法和同伦摄动法对四边简支的矩形薄膜进行了强非线性振动特性研究，研究结果表明同伦摄动法的精度优于 L–P 摄动法；何泽青等[3]根据大挠度理论建立了薄膜结构的强非线性方程，并对其进行求解，得到其线性解析解和非线性解析解；李英民等[4]提出了一种改进的多重尺度方法，用于求解薄膜结构强非线性振动的频率和位移的近似解，并与试验结果进行对比，结果表明改进的多重尺度方法求解的频率与试验结果高度吻合；田志莹等[5]运用改进的多尺度法，求解大参数薄膜屋盖的强非线性振动方程，并推导出气弹失稳临界风速的计算公式，同时对不同参数进行了分析，发现失稳临界风速与薄膜屋盖振幅密切相关，且风速较大时，几何非线性对膜屋盖的气动稳定性有重要影响；Song 等[6-7]运用改进的多尺度法，研究了封闭式和开敞式薄膜屋盖的风致稳定性，并提出了频率计算公式；研究矩形薄膜结构有阻尼自由振动特性，得到频率和位移方程的近似解，并研究薄膜结构的阻尼自由振动。Zhang 等[8]运用改进的同伦摄动法，求解正交异性矩形膜自由振动频率的近似解，结果显示该近似解具有高度的准确性。

对空间曲面模型的膜结构，由于微分控制方程中曲率的影响，增加了数学上的复杂性，很难求得曲面膜振动问题的精确解析解。因此，多采用近似方法求解近似的解析解，或采用试验和数值模拟方法进行研究。如 Xu 等[9-10]提出了风振耦合控制方程，对正交异性鞍形膜结构的非线性风振气动稳定性进行了研究，并对系统特征方程的稳定性进行分析，确定了发散失稳临界风速；孙芳锦等[11]对风与柔性结构流固耦合作用的强耦合整体方程进行研究，并采用预处理方法对经典二维与三维流固耦合问题进行了计算和分析，结果表明该方法在计算精度和效率方面都有显著提升，为风与膜结构的耦合作用研究提供了方法；张安琪等[12]分析风场流固耦合作用对气承式半圆柱形气膜结构的影响机制，结果显示相较于静力工况下，考虑流固耦合作用时气膜的位移和应力更大。尽管诸多文献已针对流固耦合作用下薄膜的自由振动特性以及失稳临界风速展开研究，但对流固耦合作用下振动频率的分析相对较少。因此，研究薄膜结构在流固耦合作用下的动力特性具有重要意义和价值。

基于冯卡门大挠度理论和达朗贝尔原理，充分考虑空气动力以及膜材的几何非线性和正交异性的影响，推导薄膜结构在流固耦合效应下的强非线性振动的控制方程，并得到其解析解；研究流固耦合作用对双曲抛物面张拉膜结构振动特性的影响，对薄膜结构的动力特性进行参数化分析，为优化薄膜结构在复杂工况下的性能表现提供理论依据与数据支撑。

1　薄膜结构非线性振动的求解

1.1　控制方程

双曲抛物面薄膜结构模型如图 1 所示。薄膜屋盖沿 X 方向长为 a，沿 Y 方向长为 b。此外，薄膜在 X 向

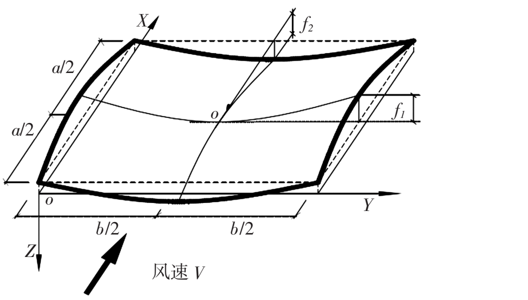


图 1　四边固支的正交异性双曲抛物面膜结构模型（风向为 X 向）

Fig. 1　Orthotropic hyperbolic parabolic membrane structure model with four edges fixed (wind direction is X direction)

和 Y 向所受到的初始预张力分别为 N_{0x} 和 N_{0y}。风速为 V，沿 X 向。

基于冯卡门大挠度理论和达朗贝尔原理，建立薄膜屋盖的强非线性振动的控制方程：

$$\begin{cases} q(x,y)+\left(N_{0y}+h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)k_y+\left(N_{0x}+h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)k_x-2h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}k_{xy}=0 \\ \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}-\dfrac{\mu_2}{E_2}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}-\dfrac{\mu_1}{E_1}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{1}{E_2}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}-\dfrac{1}{G}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}=\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases} \tag{1}$$

式中：h 为膜材厚度；N_{0x} 为 X 向预张力；N_{0y} 为 Y 向预张力；N_{xy} 为剪切力；G 为剪切模量；E_1 为 X 向杨氏弹性模量；E_2 为 Y 向杨氏弹性模量；μ_1 为 X 向泊松比；μ_2 为 Y 向泊松比；c 为阻尼系数；$\varphi=\varphi$（x，y，t）为应力函数；σ_{0x} 为 X 向初应力；σ_{0y} 为 Y 向初应力。

根据达朗贝尔原理[13]，薄膜结构产生动力响应时的广义外荷载主要由作用在结构上的风荷载、结构阻尼力以及惯性力组成。定义气动力项为 p，则单位面积上的广义外荷载为 q（x，y）：

$$q(x,y)=p(x,y,t)-2\rho c\frac{\partial w(x,y,t)}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 w(x,y,t)}{\partial t^2} \tag{2}$$

薄膜振动过程中，剪应力的影响可忽略不计[14]，可近似认为 $N_{xy}=0$，将 q（x，y）代入控制方程得：

$$\begin{gathered} \left(N_{0x}+h\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)k_x+\left(N_{0y}+h\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)k_y+p-2\rho c\frac{\partial w}{\partial t}-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \\ \frac{1}{E_1}\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\frac{1}{E_2}\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{gathered} \tag{3}$$

结构初始曲面方程为：

$$z_0(x,y)=\frac{f_2(x-a/2)^2}{(a/2)^2}-\frac{f_1(x-b/2)^2}{(b/2)^2} \tag{4}$$

式中：f_1 为 Y 向跨中垂度；f_2 为 X 向跨中拱度。

结构 X、Y 向初始曲率为：

$$\begin{cases} k_{0x}=\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}=\dfrac{8f_2}{a^2} \\ k_{0y}=\dfrac{\partial^2 z_0}{\partial y^2}=\dfrac{8f_1}{b^2} \end{cases} \tag{5}$$

相应的位移边界条件为：

$$\begin{cases} w(0,y,t)=0 \\ w(a,y,t)=0 \end{cases},\quad \begin{cases} w(x,0,t)=0 \\ w(a,b,t)=0 \end{cases} \tag{6}$$

1.2　求解控制方程

设风荷载作用下薄膜结构表面的曲面函数为：

$$z(x,y,t)=z_0(x,y)+w(x,y,t) \tag{7}$$

结构曲率为：

$$\begin{cases} k_x=k_{0x}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ k_y=k_{0y}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \tag{8}$$

对于封闭式薄膜结构而言，膜材投影面单位面积上的气动力[5]为：

$$p=-\frac{\rho_0}{2\pi}\left(-V\iint_{Ra}\frac{\left(V\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}(x-\zeta)}{\left(\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}\right)^3}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta+\iint_{Ra}\frac{\left(V\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}}{\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right) \tag{9}$$

建筑结构

将曲面函数 z（x，y，t）代入上式并进行分解得：

$$p=-A_1-A_2+A_3+A_4+A_5 \tag{10}$$

其中：

$$A_1=\frac{\rho_0+\rho^*}{2\pi}\iint_{Ra}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ A_2=\frac{\rho_0 V}{2\pi}\iint_{Ra}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ A_3=\frac{\rho_0 V^2}{2\pi}\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}(x-\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta$$

$$A_4=\frac{\rho_0 V}{2\pi}\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ A_5=\frac{\rho_0 V^2}{2\pi}\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_{\substack{x=\zeta\\y=\eta}}(x-\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta。$$

式中：$r=\sqrt{(x-\zeta)^2+(y-\eta)^2}$，$Ra\in\{0\leqslant\zeta\leqslant a,0\leqslant\eta\leqslant b\}$，$\rho^*$ 为薄膜结构内侧附加空气密度，设 $\rho^*=\rho_0$。

将结构曲率方程和气动力 p 代入薄膜屋盖的强非线性振动的控制方程组，得：

$$\begin{cases}k_{0x}h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+k_{0y}h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\left(h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+N_{0x}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(h\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+N_{0y}\right)\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\rho c\dfrac{\partial w}{\partial t}=\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+A_1+A_2-A_3-A_4-A_5\\[2ex] \dfrac{1}{E_1}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}+\dfrac{1}{E_2}\dfrac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}=\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-k_{0y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\end{cases} \tag{11}$$

设位移函数为：

$$w(x,y,t)=T(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

将位移函数代入相容方程中，得：

$$\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^4}+\frac{1}{E_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^4}=\frac{m^2n^2\pi^4}{2a^2b^2}T^2(t)\left(\cos\frac{2m\pi x}{a}+\cos\frac{2n\pi y}{b}\right)+\left(k_{0x}\frac{n^2\pi^2}{b^2}+k_{0y}\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)T(t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

设控制方程组中应力函数的解为：

$$\begin{cases}\varphi(x,y,t)=T^2(t)\varphi_1(x,y)+T(t)\varphi_2(x,y)\\[1ex] \varphi_1(x,y)=\alpha\cos\dfrac{2m\pi x}{a}+\beta\cos\dfrac{2n\pi y}{b}\\[1ex] \varphi_2(x,y)=\delta W(x,y)\end{cases} \tag{14}$$

将上式代入薄膜屋盖的强非线性振动的控制方程组得：

$$\alpha=\frac{E_2a^2n^2}{32b^2m^2},\ \beta=\frac{E_1b^2m^2}{32a^2n^2},\ \delta=\frac{k_{0x}(n\pi/b)^2+k_{0y}(m\pi/a)^2}{(n\pi/b)^4/E_1+(m\pi/a)^4/E_2}。$$

将位移函数 w（x，y，t）和应力函数 $\varphi=\varphi$（x，y，t）代入控制方程组得：

$$\begin{aligned}&\left(\rho W+\frac{\rho_0}{\pi}\gamma_1\right)T''(t)+\left[\frac{\rho_0 V}{2\pi}(\gamma_2-\gamma_4)+2\rho cW\right]T'(t)-\left(k_{0x}h\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}+k_{0y}h\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+N_{0x}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+N_{0y}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\rho V^2}{2\pi}\gamma_3\right)T(t)\\&-h\left(k_{0x}h\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+k_{0y}h\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)T^2(t)-h\left(\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)T^3(t)-\frac{\rho V^2}{2\pi}\gamma_5=0\end{aligned} \tag{15}$$

其中，

$$\gamma_1=\iint_{Ra}\frac{1}{r}\sin\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ \gamma_2=\frac{m\pi}{a}\iint_{Ra}\frac{1}{r}\cos\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ \gamma_3=\frac{m\pi}{a}\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}(x-\zeta)\cos\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,$$

$$\gamma_4=\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}(x-\zeta)\sin\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta,\ \gamma_5=\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}\left[8f_2(\zeta-a/2)/a^2\right](x-\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\text{。}$$

运用伽辽金法对控制方程组进行变化并化简得：

$$AT''(t)+BT'(t)-CT(t)-DT^2(t)-ET^3(t)-F=0 \tag{16}$$

其中，$A=\dfrac{\rho ab}{4}+\dfrac{\rho_0}{\pi}\alpha_1$，$\alpha_1=\iint_S\left(\iint_{Ra}\dfrac{1}{r}\sin\dfrac{m\pi\zeta}{a}\sin\dfrac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right)\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$B=\dfrac{\rho_0 mV}{2a}\alpha_2-\dfrac{\rho_0 V}{2\pi}\alpha_4+\dfrac{\rho cab}{2}$，

$$\alpha_2=\iint_S\left(\iint_{Ra}\frac{1}{r}\cos\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \alpha_4=\iint_S\left(\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}(x-\zeta)\sin\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$C=-\frac{m^2\pi^2b(hk_{0y}\delta+N_{0x})}{4a}-\frac{n^2\pi^2a(hk_{0y}\delta+N_{0y})}{4b}+\frac{\rho_0 mV^2}{2a}\alpha_3,\ \alpha_3=\iint_S\left(\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}(x-\zeta)\cos\frac{m\pi\zeta}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$D=h\iint_S\left(k_{0x}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+k_{0y}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)W(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ E=\frac{hm^2n^2\pi^4(\alpha+\beta)}{2ab},\ F=\frac{\rho_0V^2}{2\pi}\alpha_5,$$

$$\alpha_5=\iint_S\left\{\iint_{Ra}\frac{1}{r^3}\left[8f_2(\zeta-a/2)/a^2\right](x-\zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\eta\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

方程（16）是关于 $T(t)$ 的二阶非线性微分方程，设其满足边界条件 $T(t)\big|_{t=0}=0$ 的周期解将周期解代入式（16）并用伽辽金法可得：

$$\int_0^{T_0}\left[AT''(t)+BT'(t)-CT(t)-DT^2(t)-ET^3(t)-F\right]\sin\theta\mathrm{d}t=0 \tag{17}$$

式中：$T_0=2\pi/\omega$ 为一个周期。

对上式积分后求得：

$$\omega=\sqrt{-\frac{C}{A}-\frac{3E}{4A}f^2} \tag{18}$$

2　流固耦合作用下风速对振动频率的影响

研究流固耦合作用下不同影响参数对薄膜结构振动的影响。结构阻尼系数 $c=90\ \mathrm{N\cdot s/m^3}$；空气密度 $\rho_0=1.226\ \mathrm{kg/m^3}$。其计算公式为 $\omega=\sqrt{-\dfrac{C}{A}-\dfrac{3E}{4A}f^2}$。

2.1　振型阶数对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下振型阶数对于薄膜振动频率的影响，分别从 $m=1$，$n=1$；$m=1$，$n=3$；$m=3$，$n=1$；$m=3$，$n=3$（m、n 为振型阶数）四种情况进行分析。膜材的长和宽分别为 $a=1.5$ m，$b=1.5$ m，初始位移 $f=0.1$ m，预应力 $\sigma_{0x}=\sigma_{0y}=5\times10^3\ \mathrm{kN/m^2}$，$f_1=f_2=0.05$ m。其他以国产 ZZF 材料为例，参数如下：$\rho=0.95\ \mathrm{kg/m^2}$，$h=0.72$ mm，$E_1=1\ 590$ MPa，$E_2=1\ 360$ MPa。结果如图 2 所示。

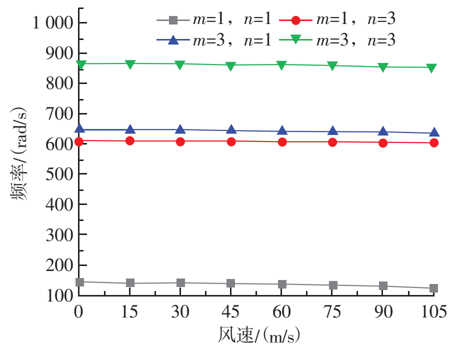


图 2　不同振型阶数下随风速变化的频率

Fig. 2　Frequency varying with wind speed under different mode orders

在风速恒定的情况下，随着结构振型阶数的增加，其频率也相应地增大。而当风速增大时，由于气流对结构产生的阻力增加，结构所受到的荷载也

会变得更加剧烈，从而导致其振动频率逐渐减小。值得注意的是，当 $m=1$，$n=3$ 和 $m=3$，$n=1$ 时的频率并不相等，且膜材的各向弹性模量不同，这证明薄膜的正交异性对其力学性能的影响是不可忽略的。

2.2 膜面密度对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下薄膜在不同膜面密度下对于振动的影响，计算膜面密度为 1.0～2.0 kg/m^2 膜材的振动频率，其他参数同 2.1 节。图 3 为膜材不同膜面密度随风速变化的频率。

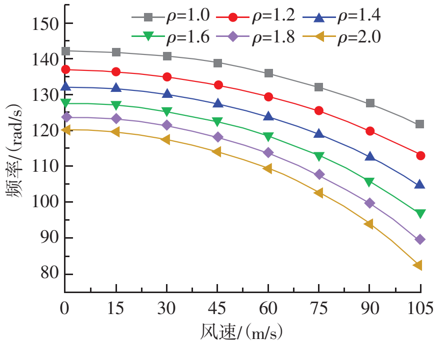


图 3 不同密度下随风速变化的频率

Fig. 3 Requency varying with wind speed under different densities

在相同风速下，随着膜面密度的增加，频率呈现逐渐减小的趋势。同时，在相同密度的条件下，频率也随着风速的增加逐渐下降，且随着风速的增大，频率下降程度显著提高，呈现出风速与频率之间非线性负相关的特点。

2.3 初始位移对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下薄膜在不同初始位移下对于振动的影响，计算初始位移为 0～0.25 m 膜材的振动频率，其他参数同 2.1 节。图 4 为膜材在不同初始位移下随风速变化的频率。

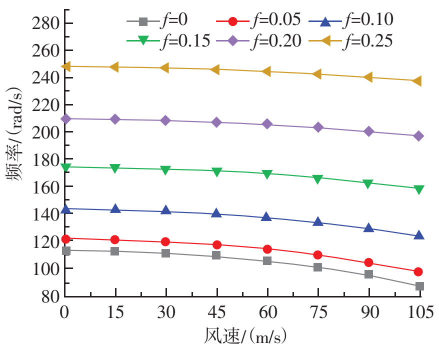


图 4 不同初始位移下随风速变化的频率

Fig. 4 Frequency varying with wind speed under different initial displacements

当初始位移逐渐升高时，相同风速下的频率呈逐渐上升的趋势。此外，随着初始位移的增加，风速对频率的影响程度逐渐降低。此外，在相同初始位移条件下，随着风速的不断升高，频率会逐渐降低，频率下降幅度也会变得更加明显，表现为两者之间的非线性关系。

2.4 预应力对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下薄膜在不同预应力下对于振动的影响，计算预应力为 1 000～5 000 kN/m^2 膜材的振动频率，其他参数同 2.1 节。图 5 为膜材在不同预应力下随风速变化的频率。

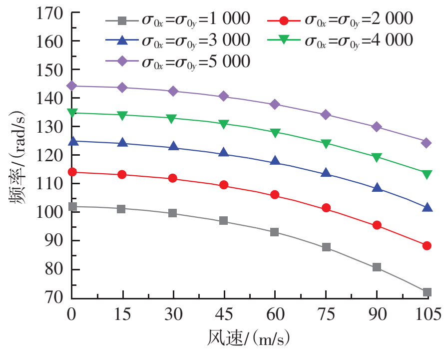


图 5 不同预应力下随风速变化的频率

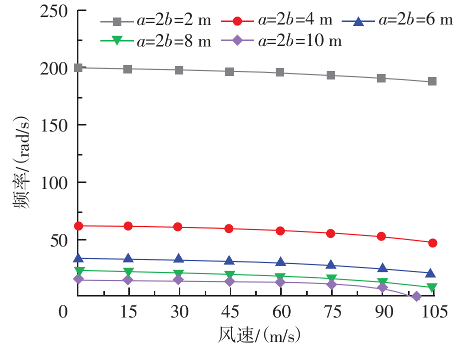
Fig. 5 Frequency changing with wind speed under different prestress

在相同的风速下，随着预应力的增加，膜结构的频率呈增加趋势。造成这种情况的原因可能是由于预应力的变化对膜结构本身产生了刚度和质量分布的变化，从而影响了频率。此外，随着风速和预应力的增加，风速对频率的影响逐渐减弱。同时，在相同的预应力下，随着风速的增加频率会逐渐降低，且风速越大，频率下降的幅度也越明显，风速与频率之间的非线性关系表现得更加明显。

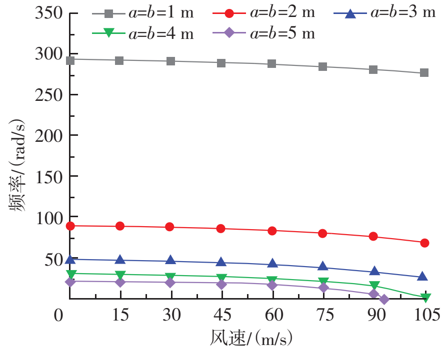
2.5 膜面尺寸对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下薄膜在不同尺寸对于振动的影响，计算不同尺寸膜材的振动频率。（1）$a/b=2/1$；（2）$a/b=1/1$；（3）$a/b=1/2$，其他参数同 2.1 节。图 6 为膜材在不同尺寸下随风速变化的频率。

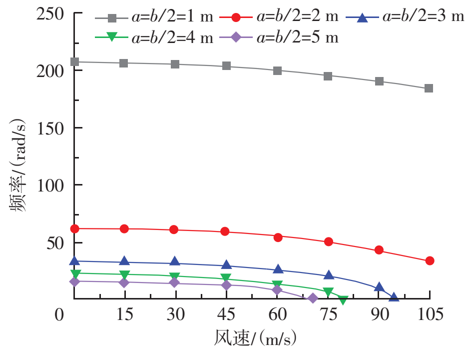
在相同风速下，频率随着膜尺寸的增大而减小。随着风速的增大频率随之减小，而随着尺寸的增大，风速对于频率的影响也逐渐增大。值得注意的是，$a/b=2/1$ 和 $a/b=1/2$ 时，互换 a 和 b 的尺寸频率是不一样的，造成这种现象的原因是由于薄膜的正交异性以及风向导致的。



（a） $a/b=2/1$



（b） $a/b=1/1$



（c） $a/b=1/2$

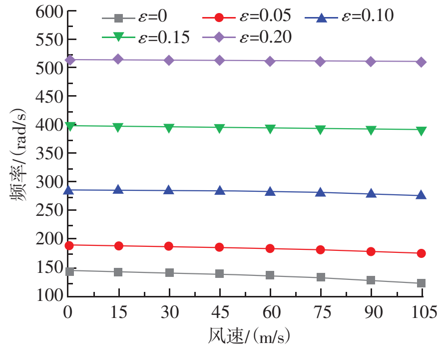
图 6　不同尺寸下随风速变化的频率

Fig. 6　Frequency with wind speed under different sizes

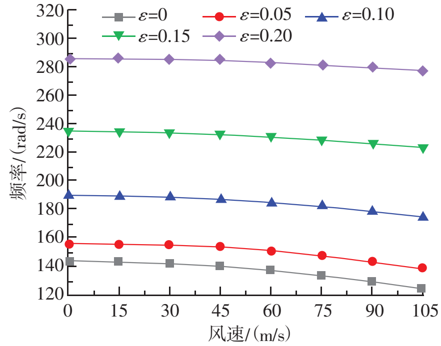
已有研究[15]表明，当结构振动频率为 0 时，结构达到失稳临界风速。例如图 6 中（a），$a=2b=10$ m 时，结构达到临界失稳风速 $V=100.18$ m/s；（b）中 $a=b=5$ m 时，结构的临界失稳风速分别为 $V=92.75$ m/s；（c）中 $a=b/2=3$ m，$a=b/2=4$ m，$a=b/2=5$ m 时，结构的临界失稳风速 V 分别为 94.21、79.42、70.12 m/s。当到达失稳临界风速时，结构的振动频率为 0，且该临界风速随着尺寸的增加而减小。

2.6　矢跨比对于振动频率的影响

为了研究流固耦合作用下薄膜在不同矢跨比对振动的影响，计算 X 向矢跨比 ε 为 0～0.2 的膜材振动频率，其他参数同 2.1 节。图 7 为膜材在不同矢跨比下随风速变化的频率。



（a） $f_2/f_1=1/2$



（b） $f_2/f_1=2/1$

图 7　不同矢跨比下随风速变化的频率

Fig. 7　Frequency with wind speed under different rise－span ratios

在相同的风速下，频率随着矢跨比的增加而增大。矢跨比不变的情况下，频率随着风速的增加而减小，同时，矢跨比越大，风速的增加对于频率变化的影响越来越小。此外，在固定参数 a 的情况下，$f_2/f_1=1/2$ 和 $f_2/f_1=2/1$ 的频率不同。另外，当 $f_2/f_1=1/1$ 时，无论矢跨比怎样变化，在相同风速下的频率基本不受 X 向矢跨比变化的影响。

3　结论

利用伽辽金法求解薄膜结构在流固耦合作用下的动力特性，分析流固耦合作用下不同参数对于薄膜结构振动频率的影响，主要结论如下：

（1）当风速保持不变时，随着膜面密度、膜面尺寸的增大，均会导致薄膜结构的振动频率逐步降低。在实际工程应用中，可通过合理调控膜面密度与膜面尺寸，实现对薄膜结构动力特性的优化与调整，以满足不同工程场景下的结构性能需求。

建筑结构

(2) 随着振型阶数的升高，初始位移、预应力的增强以及矢跨比的增加，结构的振动频率相应提高。同时，膜材具有各向异性，其各向弹性模量存在差异，且在振型阶数 $m=1$、$n=3$ 与 $m=3$、$n=1$ 时所对应的频率并不相同，这充分表明膜材的正交异性对其力学性能具有不可忽视的影响。

在实际工程领域中，可通过合理调节预应力水平、优化矢跨比等手段，对结构的动力特性进行有效调控，从而满足工程设计的特定要求，确保结构在使用过程中的稳定性与可靠性。

参 考 文 献

[1] LIU C J, ZHENG Z L, HE X T, et al. L－P perturbation solution of nonlinear free vibration of prestressed orthotropic membrane in large amplitude [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2010 (3): 242－256.

[2] LIU C J, ZHENG Z L, YANG X Y, et al. Geometric nonlinear vibration analysis for pretensioned rectangular orthotropic membrane [J]. International Applied Mechanics, 2018, 54 (1): 104－119.

[3] 何泽青，张冬辉，宋林，等. 正交异性薄膜非线性振动分析 [J]. 振动与冲击，2018，37 (12)：252－259.

[4] 李英民，宋维举，王肖巍. 固支薄膜结构强非线性振动解析方法研究 [J]. 振动与冲击，2019，38 (17)：144－148，177.

[5] 田志莹，宋维举，王欣欣. 改进多尺度法在膜屋盖静风稳定分析中的应用 [J]. 建筑科学，2020，36 (3)：10－16.

[6] SONG W J, XU J, WANG X W, et al. Effect of geometric nonlinearity on membrane roof stability in air flow [J]. Shock and Vibration, 2020 (1): 1－13.

[7] SONG W J, DU L L, ZHANG Y F, et al. Strongly nonlinear damped vibration of orthotropic membrane under initial displacement: theory and experiment [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2021, 9 (6): 1359－1372.

[8] ZHANG Y F, SONG W J, YIN H M, et al. Improved homotopy perturbation solution for nonlinear transverse vibration of orthotropic membrane [J]. Journal of Vibration Engineering & Technologies, 2022, 10 (3).

[9] XU Y P, ZHENG Z L, LIU C J, et al. Aerodynamic stability analysis of geometrically nonlinear orthotropic membrane structure with hyperbolic paraboloid [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, 137 (11): 759－768.

[10] LIU C J, DENG X W, ZHENG Z L. Nonlinear wind－induced aero－dynamic stability of orthotropic saddle membrane structures structures [J]. Journal of Wind Endineering and Industeial Aerodynamics, 2017, 164: 119－127.

[11] 孙芳锦，徐中豪，张敏. 风与柔性结构流固耦合作用的预处理方法研究 [J]. 应用力学学报，2020，37 (2)：846－850.

[12] 张安琪，杨新峰，刘平. 考虑流固耦合作用的气膜建筑力学性能分析 [J]. 科学技术与工程，2023，23 (20)：8753－8762.

[13] 刘章军，陈建兵，彭勇波. 结构动力学 [M]. 北京：中国建筑工业出版社，2022.

[14] LIU C J, ZHENG Z L, JUN L, et al. Dynamic analysis for nonlinear vibration of prestressed orthotropic membrane with viscous damping [J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2013, 13 (2): 1350018.

[15] 徐云平. 正交异性张拉膜结构非线性气动稳定性分析 [D]. 重庆：重庆大学，2011.

(上接第 93 页)

fly ash and ground granulated blast furnace slag [J]. International Journal of Pavement Engineering. 2020, 21 (9): 1114－1121.

[7] COUDERT E, DENEELE D, RUSSO G, et al. Microstructural evolution and mechanical behaviour of alkali activated fly ash binder treated clay [J]. Construction and Building Materials. 2021 (285): 1－16.

[8] GENG K, CHAI J, QIN Y, et al. Damage evolution, brittleness and solidification mechanism of cement soil and alkali－activated slag soil [J]. Journal of Materials Research and Technology. 2023 (25): 6039－6060.

[9] 郭少华，詹世佐，康天蓓，等. 固化建筑渣土力学和路用性能试验研究 [J]. 硅酸盐通报，2024，43 (11)：4261－4269.

[10] XIE J L, SUN J Y. A novel soft soil curing agent using waste residue [J]. Advances in Cement Research, 2015, 27 (1): 22－27.

[11] 李悦，齐帜飏，林辉，等. 硫铝酸盐水泥基预拌流态固化土固化剂性能的研究 [J]. 新型建筑材料，2023，50 (3)：42－45.

[12] 陈瑞敏，简文彬，张小芳，等. CSFG－FR 协同作用改良淤泥固化土性能试验研究 [J]. 岩土力学，2022 (4)：1020－1030.

[13] 张鑫，吉海峰，金生莲，等. 强风化岩流态固化土抗压强度试验研究 [J]. 水利与建筑工程学报，2024，22 (4)：85－91.

[14] 宾伟，黄靓，曾令宏，等. 水泥固化再生骨料改性盐渍土的路用性能研究 [J]. 公路，2024，69 (8)：94－100.

[15] 田威，云伟，贺文昊，等. 矿渣基地聚物固化黄土抗压强度及固化机制研究 [J]. 土木工程学报，2024 (7)：1－14.

[16] 杜建彪，罗强，蒋良潍，等. 膨胀土流态固化改性试验与配合比研究 [J]. 浙江大学学报（工学版），2024，58 (10)：2137－2148.