

带斜撑巨型框架-核心筒结构协同分析的哈密顿对偶体系*

Hamiltonian Dual System for Collaborative Analysis of Mega-braced Frame-core Tube

胡启平¹, 林 凯¹, 周 娟²

(1. 河北工程大学 土木工程学院 河北 邯郸; 2. 邯郸职业技术学院 河北 邯郸)

摘 要: 在连续化假定的基础上, 将带斜撑巨型框架与核心筒分别等效为底端固定、上端自由的悬臂梁, 等效后的悬臂梁具有弯曲刚度和剪切刚度。将楼板等效成刚性连杆, 建立带斜撑巨型框架-核心筒高层建筑结构协同分析的计算模型。在哈密顿力学体系下对结构进行分析, 导出哈密顿正则方程, 采用精细积分法求解结构在侧向力作用下的位移与内力。用这种方法对带斜撑巨型框架-核心筒结构进行协同分析, 理论推导思路清晰、过程简捷, 数值计算易于编程、精度较高。采用本文方法对带斜撑巨型框架-核心筒高层建筑结构进行协同分析, 可以准确把握结构的整体受力性能, 在初步设计阶段对结构方案进行试算和快速分析。

关键词: 带斜撑巨型框架-核心筒; 高层建筑结构计算; 哈密顿对偶体系; 协同分析; 精细积分法

中图分类号: TU973.17 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-8249 (2023) 06-0001-07

DOI: 10.19860/j.cnki.issn1005-8249.2023.06.001

HU Qiping, LIN Kai, ZHOU Juan

(1. College of Civil Engineering Hebei University of Engineering, Handan 056038, China;

2. Handan Vocational and Technical College, Handan 056038, China)

Abstract: On the basis of equivalent continuity, the mega-braced frame-core tube structure are equivalent to cantilever beams with fixed bottom and free top, and the equivalent cantilever beams have bending stiffness and shear stiffness; The floor slab is equivalent to a rigid connecting rod, and a calculation model for collaborative analysis of mega-braced frame-core tube structure is established. The structure is analyzed under Hamilton mechanics system, Hamilton canonical equation is derived, and the displacement and internal force of the structure under lateral force are solved by precise integration method. This method is used for collaborative analysis of mega-frame-core tube structure with diagonal braces. The theoretical deduction idea is clear, the process is simple, the numerical calculation is easy to program and the accuracy is high. In this paper, the collaborative analysis of mega-frame-core tube high-rise building structure with diagonal braces is adopted, which can accurately grasp the overall mechanical performance of the structure, and make trial calculation and rapid analysis of the structural scheme in the preliminary design stage.

Keywords: mega-braced frame-core tube; calculation of high-rise building structure; coordination analysis; Hamiltonian dual system; precise integration method

* 基金项目: 河北省自然科学基金资助项目 (E2016402110)。

作者简介: 胡启平 (1963—), 男, 硕士, 教授, 主要研究方向为力学与建筑结构。

通信作者: 林凯 (1997—), 男, 硕士, 研究方向为建筑土木。

收稿日期: 2023-07-12

0 引言

结构大师 Fazlur Khan^[1]于 1972 年首次提出带斜撑巨型框架, 工程师们常在设计巨型框架时增加巨型斜撑来提高结构的抗侧刚度以及结构整体

建筑结构

稳定性^[2]。带斜撑巨型框架-核心筒结构抗侧刚度较大,整体稳定性较好,在超高层建筑结构中应用较多。国内有工程实例采用带斜撑巨型框架-核心筒结构体系,例如天津高银 117 大厦,深圳平安金融中心等。支撑方式不同会对巨型框架-核心筒的破坏机理和抗震性能产生影响^[3]。邹勇强等^[4]对钢框架-混凝土核心筒结构进行分析,在钢框架设置巨型斜撑,可以显著地提高结构的刚度、钢框架与核心筒的协同工作性能。陈麟等^[5]对设置巨型支撑的巨型型钢混凝土框撑-核心筒结构进行分析,设置巨型支撑可增大外部巨型框架的抗侧刚度,使结构的整体抗侧能力得到显著提高,在地震作用下,外部巨型框架可作为第二道抗震防线,提高整体结构的抗震性能。包世华等^[6]在连续化的基础上,计算出框筒、筒中筒在水平荷载作用下结构的侧移与内力。郭伟亮等^[7]以结构连续化方法为基础,对斜交网格筒结构进行了简化分析,推导了结构在三种水平荷载作用下的侧移公式。李剑等^[9-10]在连续化的基础上,建立了带斜撑巨型框架-核心筒的简化模型,建立问题的平衡微分方程,求解出带斜撑巨型框架-核心筒结构在水平荷载作用下的侧移和内力。胡启平等^[11-15]将建筑结构的各抗侧力单元看作具有弯曲变形、剪切变形的铁摩辛柯梁,提出了建筑结构分析的并联铁摩辛柯梁模型,用哈密顿力学的方法对框架-剪力墙、筒中筒结构进行分析,采用精细积分法求解了结构的内力与变形,具有推导过程简单,精度较高等优点。

本文沿用李剑等^[10]提出的连续化模型,将带斜撑巨型框架与核心筒分别等效为悬臂梁,等效后的悬臂梁具有弯曲刚度和剪切刚度。采用并联铁摩辛柯梁模型,在哈密顿力学体系下导出结构协同分析的哈密顿正则方程,用精细积分法计算结构在水平荷载作用下的内力及变形,避免了繁琐的数学和力学推导,数值计算精度较高。本文方法可准确分析带斜撑巨型框架与核心筒协同工作性能,在初步设计阶段可对结构方案进行试算和快速分析。

1 计算模型

带斜撑巨型框架-核心筒结构是一种双重抗侧力结构体系,抗侧力单元由外部巨型框架与内部核心筒构成。在水平荷载作用下,外部巨型框架与内部核心筒通过楼板的作用协同工作,共同抵抗水平方向产生的倾覆力矩和剪力。对带斜撑巨型框架-核心筒结构协同分析时,将带斜撑巨型框架与核心筒分别等效为底端固定、上端自由的悬臂梁,将楼板等效成刚性连杆,建立带斜撑巨型框架-核心筒协同分析的计算模型^[10],如图 1 所示。建立模型时采用如下基本假设:(1)结构处于弹性工作阶段。(2)外部巨型框架与核心筒之间通过每层的刚性楼板进行连接。(3)楼板在自身平面内刚度无穷大,变形可忽略。带斜撑巨型框架与核心筒之间通过楼板相互联系并协同工作。

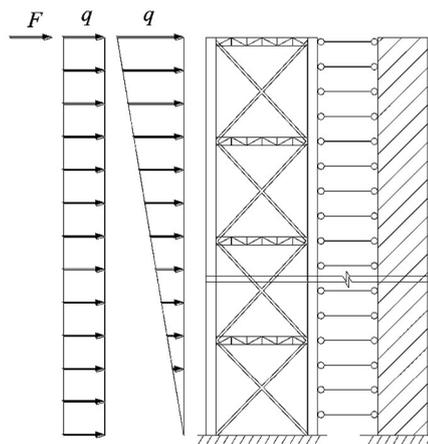


图 1 带斜撑巨型框架-核心筒计算简图

Fig. 1 Calculation diagram of mega-braced frame-core tube

假定建筑结构的各个抗侧力单元都具有弯曲变形、剪切变形,均可看作竖放的 Timoshenko 梁。楼板在自身平面内是刚性的,将楼板的作用沿高度连续化,采用并联铁摩辛柯梁模型^[13-14]对带斜撑巨型框架-核心筒进行协同分析。带斜撑巨型框架-核心筒结构有巨型框架与核心筒两个抗侧力单元,带斜撑巨型框架的等效抗弯刚度为 $E_1 I_1$, 等效抗剪刚度 $G_1 A_1$, 侧移为 ν_1 , 截面转角为 θ_1 。核心筒等效抗弯刚度为 $E_2 I_2$, 等效抗剪刚度为 $G_2 A_2$, 侧移为 ν_2 , 截面转角为 θ_2 。由基本假设可知,带

斜撑巨型框架与核心筒侧移相同，即 $\nu = \nu_1 = \nu_2$ ，作用在结构上的总的水平分布荷载为 q 。

带斜撑巨型框架-核心筒结构中的带斜撑巨型框架是由巨型柱，斜撑以及环带桁架组成。四根巨柱与斜撑在两个方向相连，形成一个空间桁架筒。在对带斜撑巨型框架简化分析时，假设材料是线弹性的，带斜撑巨型框架均为等截面。假设结构承受对称水平荷载，且不考虑结构的扭转效应，选择一榀带斜撑巨型框架进行分析，计算简图如图 2 所示。带斜撑巨型框架的总高度、总宽度分别为 H 、 B ，巨型柱的区段高度为 h ，巨型柱的抗弯刚度 $E_c I_c$ ，巨型柱的轴向刚度 $E_c A_c$ ；斜撑的抗弯刚度 $E_b I_b$ ；斜撑的轴向刚度 $E_b A_b$ ；环带桁架的等效抗弯刚度 $E_t I_t$ ；环带桁架的等效轴向刚度分别为 $E_t A_t$ 。巨型柱、斜撑的抗弯刚度可依据材料力学公式直接求解，环带桁架等效抗弯刚度以及轴向刚度的计算参阅文献 [9]。

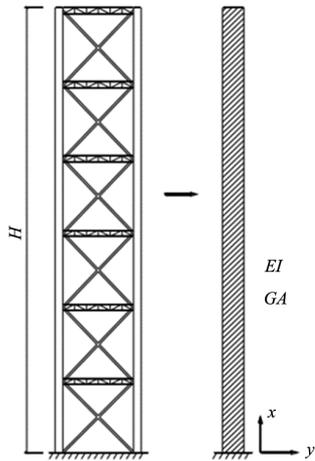


图 2 带斜撑巨型框架平面模型
Fig. 2 Plane model of mega-frame

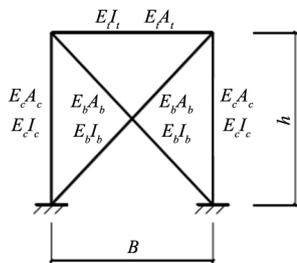


图 3 巨型柱区段高度为 h 的计算简图
Fig. 3 Calculation diagram of the height of with diagonal braces giant column section h

取巨型柱高度为 h 的区段推导带斜撑巨型框架的抗弯刚度、抗剪刚度，计算简图如图 3。将带斜撑巨型框架等效为具有抗弯刚度和抗剪刚度的悬臂梁，等效后的抗弯刚度 $E_1 I_1$ 、抗剪刚度 $G_1 A_1$ 用矩阵位移法进行求解，计算方法可以参阅文献 [9]。计算公式如下：

$$E_1 I_1 = \frac{B^2 E_c A_c}{2} + \frac{B^2 E_b A_b \sin^3 \alpha}{2} + 8 E_c A_c + \frac{E_b I_b \sin \alpha (6 B^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 8 h^2 - 12 B h \sin \alpha \cos \alpha)}{24 (E_c I_c + E_b I_b \sin^5 \alpha) + \frac{h^2}{(6 E_c I_c + 6 E_b I_b \sin^3 \alpha)^2}}$$

$$G_1 A_1 = \frac{24 (E_c I_c + E_b I_b \sin^5 \alpha)}{h^2} + \frac{2 E_b A_b \sin \alpha \cos^2 \alpha - [3 E_t I_t + 2 B (E_c I_c + E_b I_b) \sin \alpha] h}{[3 E_t I_t + 2 B (E_c I_c + E_b I_b) \sin \alpha] h}$$

其中 $\alpha = \arctan(h/B)$

带斜撑巨型框架-核心筒结构中的核心筒为带连梁的核心筒，连梁连接四片“L”型剪力墙构成核心筒。带连梁核心筒可采用双肢墙的力学模型进行分析，引入等效刚度的概念，推导出带连梁核心筒结构等效抗弯刚度 $E_2 I_2$ 、等效抗剪刚度 $G_2 A_2$ ，具体计算方法可参考文献 [9]。

2 带斜撑巨型框架-核心筒协同分析的哈密顿体系

带斜撑巨型框架-核心筒结构具有两个抗侧力单元，将每个抗侧力单元看作为竖放的铁摩辛柯梁，均考虑其弯曲变形和剪切变形，形变势能为

$$\Pi_1 = \int_0^h \frac{1}{2} \left[E_1 I_1 \dot{\theta}_1^2 + G_1 A_1 (\dot{v} - \theta_1)^2 + E_2 I_2 \dot{\theta}_2^2 + G_2 A_2 (\dot{v} - \theta_2)^2 \right] dz \quad (1)$$

楼板是刚性的，故不用考虑其形变势能。外力势能为

$$\Pi_2 = \int_0^h (-qv) dz \quad (2)$$

则带斜撑巨型框架-核心筒结构的总势能为

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \int_0^h \left\{ \frac{1}{2} \left[E_1 I_1 \dot{\theta}_1^2 + G_1 A_1 (\dot{v} - \theta_1)^2 + E_2 I_2 \dot{\theta}_2^2 + G_2 A_2 (\dot{v} - \theta_2)^2 \right] - qv \right\} dz \quad (3)$$

建筑结构

拉格朗日函数为结构的总势能密度,也就是结构的单位高度的总势能。根据带斜撑巨型框架-核心筒结构的总势能表达式,可得到结构的拉格朗日函数为

$$L = \frac{1}{2} \left[E_1 I_1 \dot{\theta}_1^2 + G_1 A_1 (\dot{v} - \theta_1)^2 + E_2 I_2 \dot{\theta}_2^2 + G_2 A_2 (\dot{v} - \theta_2)^2 \right] - qv \quad (4)$$

写成矩阵形式

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T K_{22} \dot{q} + \dot{q}^T K_{21} q + \frac{1}{2} q^T K_{11} q - g^T q \quad (5)$$

式中: $q = [v, \theta_1, \theta_2]^T$, $g = [q, 0, 0]^T$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} GA & & \\ & E_1 I_1 & \\ & & E_2 I_2 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -G_1 A_1 & -G_2 A_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & G_1 A_1 & \\ & & G_2 A_2 \end{bmatrix}$$

且 $K_{21} = K_{12}^T$, $GA = G_1 A_1 + G_2 A_2$ 。

采用勒让德变换,引入广义位移 q 的对偶变量 p 。 p 即为广义位移所对应的广义力。

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = K_{22} \dot{q} + K_{21} q \quad (6)$$

将公式 (5) (6) 代入哈密顿函数 $H(q, p) = p^T \dot{q} - L(q, \dot{q})$ 得到矩阵形式的哈密顿函数

$$H(q, p) = p^T A q - \frac{1}{2} q^T B q + \frac{1}{2} p^T D p + h_q^T p - h_p^T q \quad (7)$$

其中 $A = -K_{22}^{-1} K_{21}$, $B = K_{11} - K_{21} K_{22}^{-1} K_{12}$,

$$D = K_{22}^{-1}, h_q = 0, h_p = -g \quad (8)$$

导出哈密顿正则方程

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = A q + D p + h_q \\ \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} = B q - A^T p + h_p \end{cases} \quad (9)$$

简化为如下形式

$$\dot{v} = H v + h \quad (10)$$

$$\text{式中: } v = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} A & D \\ B & -A^T \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} h_q \\ h_p \end{bmatrix}。$$

3 数值计算

公式 (10) 为带斜撑巨型框架-核心筒结构协同分析的哈密顿正则方程,该方程是对偶的一阶微分方程组。哈密顿体系建立起来后进行求解时需要给出边界条件。对于我们所研究的高层结构,底部固定,可取 $q_a = 0$; 顶部自由,可取 $p_b = 0$ 。 q_a 为结构底部广义位移; p_b 分别为结构顶部广义力。采用两端边值问题的精细积分法^[8],可以求解结构各结点的广义位移、广义力,即 $[q, p]^T = [v, \theta_1, \theta_2, V, M_1, M_2]^T$, V 为结构的总剪力, M_1, M_2 分别为带斜撑巨型框架、核心筒的弯矩,整个求解过程可通过简单编程来实现。求得外部巨型框架的弯矩为 $M_1(x)$,巨型柱的轴力可用应力乘以截面面积进行求解^[9]:

$$N_c(x) = \sigma A_c = \frac{M_1(x)}{I} \frac{B}{2} A_c = \frac{B E A_c}{2 E I} M_1(x) \quad (12)$$

巨型框架的水平剪力是由巨型柱的剪力和斜撑轴力的水平分量承担。巨型框架的剪力为 $V_1(x)$,巨型柱的抗剪刚度 $G_c A_c$,巨型斜撑的抗剪刚度为 $G_b A_b$,

则巨型柱剪力^[9]:

$$V_c(x) = \frac{G_c A_c}{GA} V_1(x) = \left(\frac{24 E_c I_c}{h^2} - \frac{1}{(6 E_c I_c + 6 E_b I_b \sin^3 \alpha)^2} \right) \frac{V_1(x)}{GA} \quad (13)$$

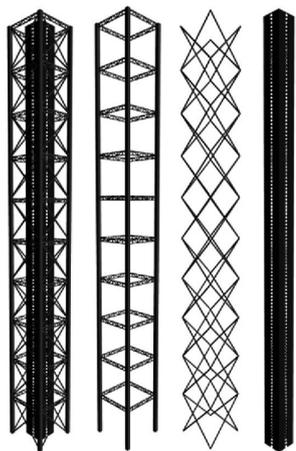
斜撑轴力水平分量^[9]:

$$V_b(x) = \frac{G_b A_b}{GA} V_1(x) = \left(\frac{24 E_b I_b \sin^5 \alpha}{h^2} + 2 E_b A_b \sin \alpha \cos^2 \alpha \right) \frac{V_1(x)}{GA} \quad (14)$$

4 计算实例与分析

选取参考文献 [10] 的算例进行分析,带斜撑巨型框架-核心筒结构模型如图 4 所示。结构总

高度为 600 m，结构总宽度为 60 m，巨型柱区段高度为 60 m，结构层高为 5 m，核心筒宽度为 30 m，核心筒厚度为 1.2 m，墙肢长度为 12.5 m，连梁高度为 1 m，巨型柱截面尺寸为 5 m × 5 m，巨型斜撑尺寸为 1800 mm × 900 mm × 50 mm × 150 mm，环带桁架杆的尺寸为 1000 mm × 800 mm × 100 mm × 100 mm，钢材的弹性模量 2.06×10^5 MPa，混凝土的弹性模量为 3.6×10^4 MPa。采用文献 [9] 计算方法，求得带斜撑巨型框架的等效抗弯刚度 $E_1 I_1 = 3.4 \times 10^{15}$ N · m²，等效抗剪刚度 $G_1 A_1 = 1.75 \times 10^{11}$ N；核心筒等效抗弯刚度 $E_2 I_2 = 5.56 \times 10^{14}$ N · m²，等效抗剪刚度为 $G_2 A_2 = 7.48 \times 10^{11}$ N。结构承受顶点集中荷载为 60000 kN。



总体系=巨型框架+巨型斜撑+核心筒

图 4 带斜撑巨型框架-核心筒体系

Fig. 4 The system of mega-braced frame-core tube building

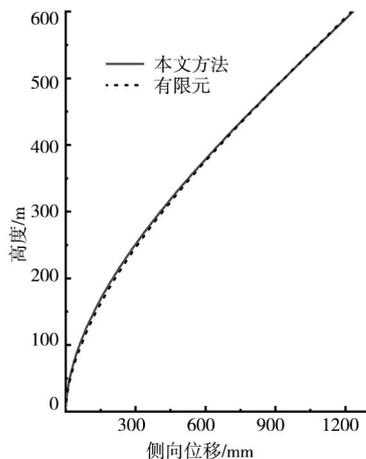


图 5 结构侧向位移

Fig. 5 Lateral displacement of structure

对上述算例我们采用本文提出的方法进行了计算。为便于比较，我们还采用空间模型（如图 4 所示）用有限元方法进行了计算。

4.1 结构侧向位移

采用本文方法求得的带斜撑巨型框架-核心筒顶点侧移为 1233.90 mm，文献得到的顶点侧移为 1234.74 mm，采用有限元求得的顶点侧移为 1226.4 mm。本文求得的顶点侧移和文献以及有限元结果误差均不超过 1%。本文得到的结构侧向位移与有限元结果基本吻合，如图 5 所示。结构的侧向变形呈“弯曲线”。底部楼层的层间侧移小于顶部楼层的层间侧移，层间侧移角随着楼层高度的增加依次增大。

4.2 结构的内力分配

以巨型柱的区段高度 60 m 为控制点，求得的内力值如表 1

表 1 结构剪力和弯矩
Table 1 Structural shear force and bending moment

高度 /m	总剪力 /kN	内筒剪力 /10 ⁴ kN	外筒剪力 /10 ⁴ kN	内筒弯矩 /10 ⁶ kN · m	外筒弯矩 /10 ⁷ kN · m
0	60000	4.8624	1.1376	7.3926	2.8607
60	60000	2.2729	3.7271	4.9756	2.5804
120	60000	1.3519	4.6481	4.3429	2.4457
180	60000	1.0245	4.9758	3.6468	2.1553
240	60000	0.9085	5.0924	3.0731	1.8527
300	60000	0.8662	5.1338	2.5431	1.5457
360	60000	0.8514	5.1419	2.0286	1.2371
420	60000	0.8462	5.1538	1.5196	0.9280
480	60000	0.8443	5.1557	1.1025	0.6187
540	60000	0.8437	5.1563	0.5062	0.3094
600	60000	0.8435	5.1565	0	0

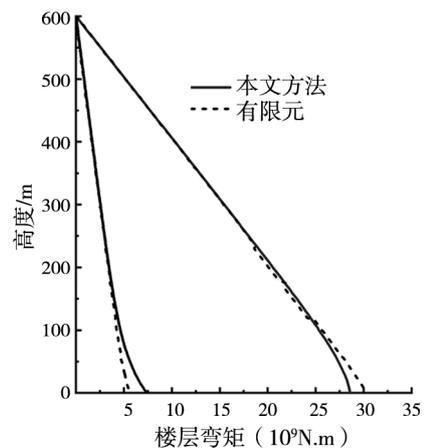


图 6 内外筒弯矩分配

Fig. 6 Bending moment distribution of inner

建筑结构

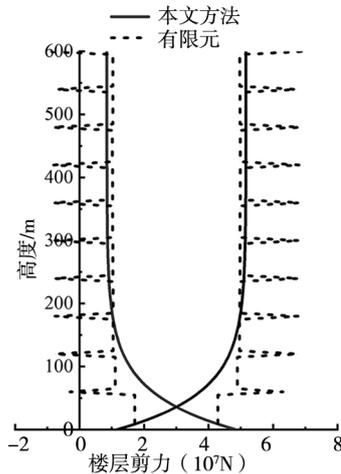


图7 内外筒剪力分配

Fig. 7 Shear distribution of inner and outer tube and outer tube

图6为结构的弯矩分配图。由图可知,采用哈密顿力学方法求得的弯矩与有限元得到的结果基本吻合带斜撑巨型框架承担较多的弯矩。图7为结构的剪力分配图。由图可知,除底部少数楼层外,其它楼层带斜撑巨型框架与核心筒分担的剪力沿高度变化不大,近似为一定值,外筒承担了大多数剪力,与内外筒抗剪刚度之比完全相反;在结构底部少数楼层,带斜撑巨型框架承担的剪力从上到下依次减小,内部核心筒承担的剪力依次增大。除了在楼层底部和设置环带桁架处,本文方法得到的内外筒剪力与有限元得到的剪力基本一致。本文用哈密顿力学的方法对结构进行协同分析时采用了连续化假设,得到的内外筒的剪力是连续的,采用有限元得到的楼层剪力在环带桁架处存在剪力突变。带斜撑巨型框架-核心筒结构与传统的框架筒体结构受力机理不同,外部巨型框架承担了较多的弯矩和剪力。

4.3 结构内力、变形影响因素分析

抗剪刚度和抗弯刚度对结构的侧向变形和结构内力影响较大。斜撑可提高结构的抗侧刚度以及整体稳定性,控制其它参数不变,改变斜撑的横截面尺寸探讨对结构侧向变形以及内力的影响,将斜撑横截面尺寸由原来的 $1800\text{ mm} \times 900\text{ mm} \times 50\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ 改变为 $1800\text{ mm} \times 1800\text{ mm} \times 200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ 、 $900\text{ mm} \times 900\text{ mm} \times 150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ 。

表2 结构内力、位移对比

Table 2 Comparison of internal force and displacement of structure

斜撑 横截面 面积/ m^2	顶点 侧向 位移/ m	内筒 基底弯矩 $/10^6\text{ kN} \cdot \text{m}$	外筒 基底弯矩 $/10^7\text{ kN} \cdot \text{m}$	内筒 基底剪力 $/10^4\text{ kN}$	外筒 基底剪力 $/10^4\text{ kN}$
0.45 (75%)	1251.90	7.5413	2.8487	4.9072	1.0928
0.6 (100%)	1233.90	7.3926	2.8607	4.8624	1.1376
1.28 (213%)	1115.56	6.2470	2.9753	3.9998	2.0002

由表2中的数据可得到,改变斜撑的面积对结构顶点侧移和弯矩分配影响较小,但是对剪力分配影响较大。巨型斜撑面积越大,在侧向荷载作用下外部带斜撑巨型框架承担的剪力就越多。

5 结论

(1) 本文将带斜撑巨型框架与核心筒分别等效为底端固定、上端自由的悬臂梁,悬臂梁有弯曲变形和剪切变形,建立带斜撑巨型框架-核心筒计算模型。用哈密顿力学对带斜撑巨型框架-核心筒结构进行分析,导出哈密顿对偶体系,用精细积分法进行求解,具有概念清晰、推导过程简单、计算简捷等特点,避免了传统方法复杂的理论推导。针对带斜撑巨型框架-核心筒协同分析提出了一种新的计算方法,并通过工程案例,与参考文献以及有限元的计算结果进行对比分析,验证本文方法的可行性。

(2) 超高层结构自由度较多,计算分析工作量较大。对结构采用简化模型分析时,计算简便,同时可以快速把握结构的整体受力性能。本文采用哈密顿力学的方法对带斜撑巨型框架-核心筒结构进行简化分析,可以准确把握结构协同工作的性能,可用于初步设计阶段时对结构方案进行快速受力分析。

(3) 计算结果表明,水平荷载作用下,带斜撑巨型框架-核心筒变形呈“弯曲型”;除结构底部少数楼层外,带斜撑巨型框架和核心筒分担的剪力沿高度变化不大;在结构底部少数楼层,带斜撑巨型框架的剪力逐渐减小,内部核心筒的剪力逐渐增大;斜撑面积越大,水平荷载作用下外部巨型框架承担的剪力越多。

参 考 文 献

- [1] KHAN F. R. , AMIN N. R. Analysis and design of frame tube structures for tall concrete buildings [J] . Journal of Structural Engineering, 1973, 51 (3): 85 - 92.
- [2] 周绪红, 单文臣, 刘界鹏, 等. 支撑巨型框架-核心筒结构体系抗震性能研究 [J] . 建筑结构学报, 2021, 42 (1): 75-83.
- [3] LI Z , LIU P , TENG J , et al. Seismic performance and failure mechanism of megabraced frame - core tube structures with different brace patterns [J] . Advances in Civil Engineering, 2018, 2018 (10): 1-23.
- [4] 邹勇强, 陈麟, 周云. 钢框架-钢筋混凝土核心筒结构的协同工作性能分析 [J] . 钢结构, 2008, 23 (9): 12-15.
- [5] 陈麟, 杨航, 周云. 巨型型钢混凝土框撑-核心筒结构性能分析 [J] . 建筑结构, 2012 (3): 91-95.
- [6] 包世华, 张铜生. 高层建筑结构设计及计算 [M] . 北京. 高等教育出版社. 2013.
- [7] 郭伟亮, 滕军. 超高建筑斜交网格筒力学性能研究 [J] . 西安建筑科技大学学报 (自然科学版), 2010, 42 (2): 174-179.
- [8] 钟万勰. 应用力学对偶体系 [M] . 北京. 北京出版社. 2002: 12-484.
- [9] 李剑. 带斜撑巨型框架-核心筒的抗侧机理研究 [D] . 南京: 东南大学, 2020.
- [10] 李剑, 孙逊. 带斜撑巨型框架-核心筒结构抗侧机理研究 [J] . 建筑科学, 2020, 36 (S2): 206-212.
- [11] 胡启平, 李张苗, 侯瑞珀. 铁摩辛柯梁弯曲问题的对偶求解体系 [J] . 河北建筑科技学院学报, 2006 (3): 1-2+19.
- [12] 胡启平, 孙良鑫, 高洪俊. 铁摩辛柯梁弯曲问题的精细积分法 [J] . 工业建筑, 2007 (S1): 268-270.
- [13] 胡启平, 刘鹏, 吕铭. 考虑部分楼板变形时框-剪结构的协同分析 [J] . 河北工程大学学报 (自然科学版), 2009, 26 (3): 4-7+11.
- [14] 胡启平, 高洪俊, 凌明俊. 筒中筒结构动力特性分析的状态空间法 [J] . 建筑科学, 2007 (11): 1-4.
- [15] 胡启平, 卢明. 筒中筒结构协同分析新方法 [J] . 工程力学, 2007 (S1): 150-153.

E-mail: fmhzhly@163.com