

W 形人行天桥人致振动舒适度与减振研究*

Research on the Comfort and Damping of Pedestrian-induced Vibration of a W-shaped Pedestrian Bridge

吴海亮¹, 申彦利^{1,2}

(1. 河北工程大学 土木工程学院, 河北 邯郸 056000;
2. 河北省装配式结构技术创新中心, 河北 邯郸 056000)

摘要: 为解决 W 形人行天桥在极端人群荷载作用下的人桥共振问题, 以西南地区某实际工程为例, 基于数值模拟的方法进行极端人群荷载下的动力舒适度分析, 并对其减振方案进行研究。研究表明: 当人行天桥竖向一阶自振频率为 3.04 Hz 时, W 形人行天桥存在人桥共振隐患; 通过计算, 0.2、0.5、1.0、1.5、4.6 P/m² 五种人群荷载工况下主梁峰值加速度为 0.96 m/s², 舒适度指标为中等, 未达到最优的舒适性等级。在振幅最大位置处设置质量比为 1% 的调谐质量阻尼器 (TMD) 后, 主梁峰值加速度降为 0.10 m/s², 减振率为 89.6%, 人行天桥满足最优的舒适度等级。研究成果可为同类异形人行天桥人致振动舒适度评价与减振设计提供技术参考。

关键词: 异形人行天桥; 人致振动; 舒适度研究; 减振设计

中图分类号: U448 文献标志码: A 文章编号: 1005-8249 (2024) 02-0117-08

DOI: 10.19860/j.cnki.issn1005-8249.2024.02.022

WU Hailiang¹, SHEN Yanli^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056000, China;

2. Hebei Province Prefabricated Structure Technology Innovation Center, Handan 056000, China)

Abstract: In order to solve the man-bridge resonance problem of a W-type pedestrian bridge under extreme crowd load, taking a practical project in southwest China as an example, the dynamic comfort analysis under extreme crowd load was carried out based on numerical simulation method, and the vibration reduction scheme was studied. The results show that when the vertical first-order natural vibration frequency of the pedestrian bridge is 3.04 Hz, the W-shaped pedestrian bridge has hidden trouble of human-bridge resonance. According to the calculation, the peak acceleration of the main beam is 0.96 m/s² under the five crowd loading conditions of 0.2, 0.5, 1.0, 1.5 and 4.6 P/m², and the comfort index is medium, which does not reach the optimal comfort level. After a tuned mass damper (TMD) with a mass ratio of 1% was set at the position with the maximum amplitude, the peak acceleration of the main beam was reduced to 0.10 m/s², and the vibration reduction rate was 89.6%. The pedestrian bridge satisfied the optimal comfort level. The research results can provide technical reference for evaluation of human induced vibration comfort and vibration reduction design of similar special-shaped pedestrian bridges.

Keywords: alien pedestrian bridge; human-induced vibration; comfort research; vibration damping design

* 基金项目: 国家自然科学基金 (51378169); 河北省高等学校科学技术研究重点项目 (ZD2016147)。

作者简介: 吴海亮 (1996—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 结构工程方面的学习和研究。

通信作者: 申彦利 (1977—), 男, 博士后, 教授, 主要研究方向: 结构抗震工程学方面的研究。

收稿日期: 2023-04-25

道桥技术

0 引言

随着我国经济的发展,交通压力越来越大,因此在许多行人密集的道路交叉口增设了人行天桥,这类桥的振动与舒适度也越来越受到学者和社会的关注。

2000年,位于英国伦敦的千禧桥在开通当日因出现了大幅度的横向振动,被政府紧急关闭。千禧桥事件之后,各国学者开始对人行桥的人致振动开展更多研究。Dallard等^[1]通过对千禧桥实验数据的分析,总结了人桥相互作用规律,推导出模态横向稳定状态下的临界行人数量公式;Nakamura^[2]以日本某桥为背景进行了人行桥横向振动参数分析,验证了所提激振力参数取值的合理性;袁旭斌^[3]提出了一种基于试验的人桥相互作用模型,考虑了未同步人群的强迫振动以及同步人群的自激作用;陈政清等^[4]对国内某曲线人行斜拉桥进行了动力设计以及振动控制,使桥梁舒适度满足规范要求;法永生等^[5]利用人致振动舒适度评价标准以及烦恼率模型,提出了人行桥竖向与侧向耦合振动时的综合评价方法;何勇等^[6]针对多跨柔性人行桥人致振动舒适度验算问题,提出了基于振动均方根加速度响应谱的计算方法;党振宇等^[7]提出了人行桥人致振动计算的频域方法,推导了带调谐质量阻尼器的人行桥随机振动模型;李晓玮等^[8]以某实际工程为研究对象,分析了人行桥在行人荷载作用下安装TMD系统前后的振动响应,验证了TMD系统在人行桥上良好的减振作用。近几年新建的异形人行桥大多采用钢结构并且往大跨轻柔的方向发展,该类桥梁的基频较低,一般在人致振动的敏感频率范围内,容易出现人桥共振的现象。我国现行的CJJ 69—1995《城市人行天桥与人行地道技术规范》^[9]关于人行桥舒适度的条文较少,只规定了结构竖向自振频率 $>3\text{Hz}$,对于人群荷载模型以及如何进行人行桥舒适度分析并没有作出详细说明。国外在该领域也没有统一规定,人行桥舒适度分析方法各不相同。因此对异形人行天桥舒适度研究显得尤为重要。

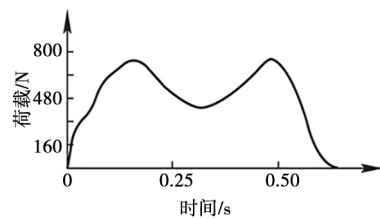
在现有研究基础上,以西南地区某W型人行天桥为例,基于数值模拟的方法,进行不同人群荷载工况下的动力响应分析以及舒适度分析,并对其减振方案进行研究。

1 人行天桥的行人荷载模型及舒适度分析相关理论

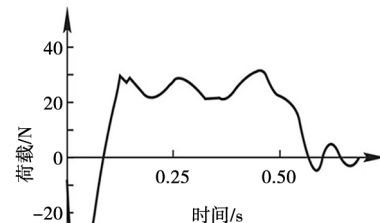
1.1 行人荷载模型

1.1.1 单人荷载模型

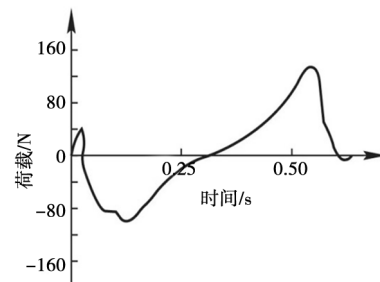
行人在桥上正常行走时,每迈一步重心就会上下变化一次,产生竖向荷载;同时,当行人向前走动时,也会导致重心左右摆动,产生横向荷载;行人走动时与地面之间产生的摩擦力,还会沿桥面产生纵向荷载。行人正常行走时三种步行力的时程曲线如图1所示^[10],行人重心变化轨迹如图2所示。



(a) 竖向荷载



(b) 横向荷载



(c) 纵向荷载

图1 单人步行力竖向、横向、纵向分量时程曲线

Fig. 1 Time-history curve of vertical, transverse and longitudinal components of walking force of a single person

尽管行人个体的身体特征各不相同,但行人荷载整体上表现出明显的周期性以及窄带随机性的特点。单人行走、奔跑、跳跃的脚步力时程曲线可用傅里叶级数表示^[11]:

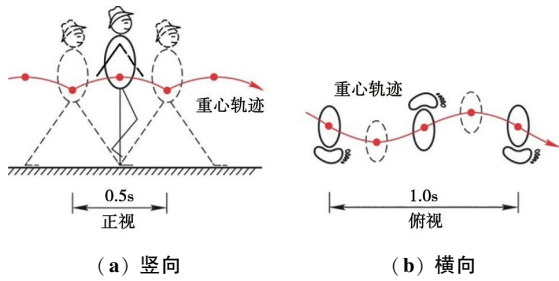


图 2 行人重心变化轨迹

Fig. 2 Pedestrian center of gravity change trajectory

$$F(t) = P \left[1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \sin(2\pi nft + \varphi_n) \right] \quad (1)$$

式中： α_n 为动荷载系数； φ_n 为相位角； f 为行人脚步频率； P 为行人体重； n 为脚步力的谐波阶次， $n = 1, 2, 3, \dots$ ； N 为脚步力的总谐波数量； t 为时间。

1.1.2 人群荷载模型

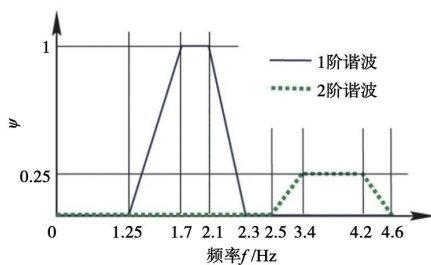
由于行人荷载具有随机性，人群荷载相比于单人荷载，更难用数学模型表达，通常在单人荷载叠加作用的基础上折减。目前德国对人行桥的人致振动分析以及舒适度分析研究较为深入，德国《人行桥设计指南 EN03》规范^[12]对动荷载计算方法、舒适度评价以及人群荷载模型作出了较详细的说明。因此对于人群荷载模型，参照德国规范，考虑行人步行力前两阶谐波荷载，人群荷载模型为：

$$P(t) = P \times \cos(2\pi f_s t) \times n' \times \psi \quad (2)$$

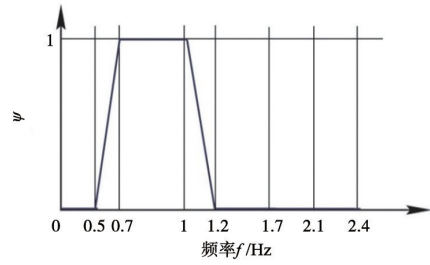
式中： P 为单个行人步频为 f_s 时所产生力的分量，横向取 35 N，纵向取 140 N，竖向取 280 N； f_s 为行人脚步频率，假设它等于人行桥基频； ψ 为折减系数，考虑了脚步频率接近结构基频临界范围的概率，取值方法如图 3； n' 为加载面上的等效行人人数。

加载面上的等效行人人数公式为：

$$\begin{cases} n' = \frac{10.8 \sqrt{\xi n}}{S} & d < 1.0 \\ n' = \frac{1.85 \sqrt{n}}{S} & d \geq 1.0 \end{cases} \quad (3)$$



(a) 竖向振动



(b) 横向振动

图 3 人群荷载叠加折减系数

Fig. 3 Crowd load superposition reduction factor

式中： n 为加载面面积为 S 时的行人数量 ($n = S \times d$)； ξ 为结构阻尼比。

一个谐波荷载 $P(t)$ 加载到结构某一振型的方法如图 4 所示。

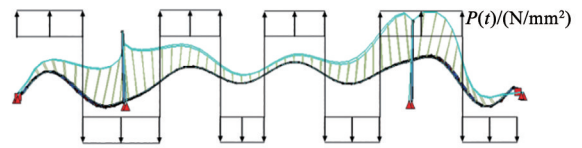


图 4 谐波荷载加载方法

Fig. 4 Harmonic load loading method

1.2 人行天桥的舒适度评价指标及分析步骤

1.2.1 舒适度评价指标

结构振动峰值加速度是评价人行天桥舒适度的常用指标。加速度值越大，舒适性越差。德国规范^[12]建议的人行桥振动加速度限值见表 1。

表 1 舒适度评价指标

Table 1 Comfort evaluation index

舒适度等级	舒适度	竖向加速度/(m/s ²)	横向加速度/(m/s ²)
CL1	最好	<0.5	<0.1
CL2	中等	0.5~1.0	0.1~0.3
CL3	最小	1.0~2.5	0.3~0.8
CL4	不可接受	>2.5	>0.8

1.2.2 舒适度分析步骤

基于以上理论，按以下步骤进行人行天桥舒适度分析：

(1) 建立人行天桥有限元模型，分析天桥各阶振型，判断是否有处于竖向或横向振动敏感频率范围内的振型。

(2) 对于某一阶处于敏感频率范围内的振型，根据公式 (2) 计算相应的人群荷载模型，再根据图 4 将人群荷载加载到人行天桥有限元模型节点上。

(3) 通过时域分析计算得到人行天桥振动峰值加速度，基于表 1 对该阶振型对应的舒适度进行评价。

道桥技术

(4) 选择其他处于敏感频率范围内的振型重复以上步骤完成对所有振型的舒适度评价。

2 工程实例

西南地区 W 形人行天桥工程为四跨连续钢箱梁人行天桥，跨径布置为 35.85 m+2×17.85 m+24.57 m，全长 96.12 m，平面呈 W 形。1、4 跨主梁梁高 1.5 m，梁宽 5.5 m，人行道宽 4 m；2、3 跨主梁梁高

1.5 m，梁宽 4.5 m，人行道宽 3 m。梯道梁高 0.3 m，宽 0.8 m；梯道宽 2.7 m，人行道宽 2.5 m。天桥下部结构主墩采用矩形花瓶墩接桩基础；梯道墩采用矩形墩接桩基础。主墩截面尺寸为 0.8 m×1.1 m，梯道墩截面尺寸为 0.6 m×0.6 m。梯道墩桩基础桩径为 1.0 m，主墩桩基础桩径为 1.3 m。主墩、梯道墩及桩基础均采用 C30 混凝土。人行天桥效果图、平面图、立面图及横断面图如图 5。

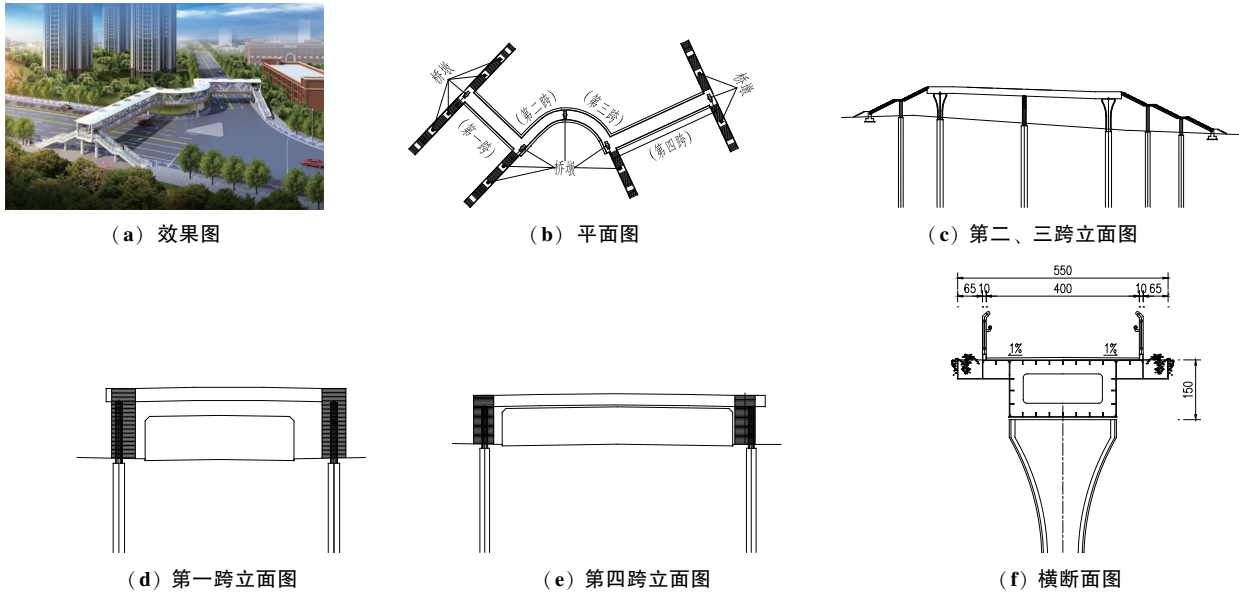


图 5 人行天桥效果图、平面图、立面图及横断面图
Fig. 5 Rendering, plan, elevation and cross-section of pedestrian bridge

3 人行天桥舒适度数值模拟分析

3.1 人行天桥的数值模型建立

3.1.1 截面几何参数与材料属性

人行天桥主梁、梯道梁均为箱形截面，梁横截面图如图 6 所示。主梁和梯道梁均采用 Q345C 钢，钢材抗压、抗拉和抗弯强度设计值 $f_d = 275 \text{ MPa}$ ，剪切模量为 $0.79 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，弹性模量为 $2.06 \times 10^5 \text{ MPa}$ ，泊松比为 0.3，线膨胀系数为 $1.2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ 。

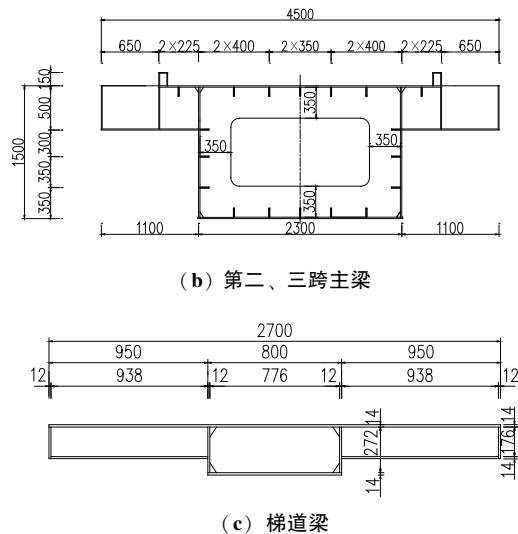
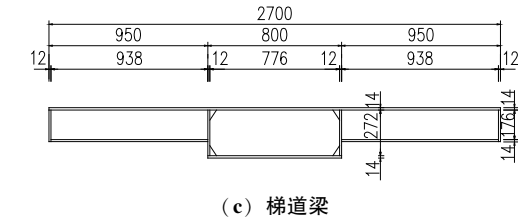
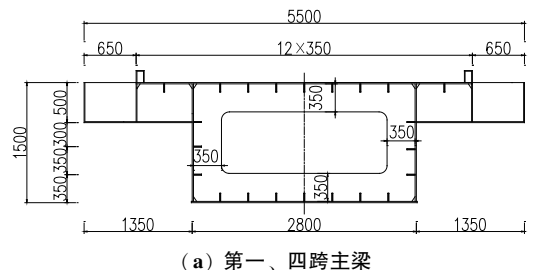


图 6 人行天桥主梁、梯道梁横截面图
Fig. 6 Cross-sectional view of main beam and staircase beam of pedestrian bridge



3.1.2 单元选取与约束条件

人行天桥主梁和梯道梁均采用梁单元模拟, 全桥共 103 个节点, 93 个单元。天桥约束包括两种类型, 分别为: 固定支座和活动铰支座。固定支座设在天桥第二、三跨曲线梁中间处, 其余约束均为活动铰支座, 全桥约束见图 7 中各个六边形边界条件。梯道梁与主梁的连接以及二、三跨主梁与一、四跨主梁的连接均采用弹性连接模拟, 弹性连接类型为固定, 模拟实际工程中梁与梁之间的焊接。

3.1.3 静力荷载

静力荷载包括人行天桥自重、主梁和梯道梁二期恒载以及温度荷载, 其中自重为一期恒载, 二期恒载包括桥面铺装以及护栏。计算人行天桥自重时钢材容重取 78.5 kN/m^3 , 主梁二期恒载为 10.9 kN/m (第一、四跨) 和 8.3 kN/m (第二、三跨), 梯道梁二期恒载为 17.0 kN/m , 梯道梁平台二期恒载为 4.2 kN/m , 主梁绿化带为 9.4 kN/m 。二期恒载以均布荷载的形式加载到模型节点上。将人行天桥自重和二期恒载转化为 x 、 y 、 z 三个方向的质量。为了模拟常年整体温差和日照梯度温差, 定义整体升温降温 and 日照梯度温差采用 JTG D60—2015 《公路桥涵设计通用规范》^[13] 第 4.3.12 条 3 小条的规定值。

3.1.4 动力荷载与时程荷载工况

动力荷载为人群荷载, 人群荷载时程函数采用简谐函数 (见式 (2))。时程荷载工况分析采用直接积分法, 分析时间为 40 s , 分析时间步长为 0.01 s ; 阻尼采用瑞利阻尼, 钢箱梁的阻尼比设为 0.004 ^[14]。人群荷载通过节点动力荷载模拟, 施加方向依据敏感频率范围内的振型特征, 若振型为竖向 (横向) 振动, 则人群荷载竖向 (横向) 加载, 人群荷载作用在人行天桥的有限元模型如图 7 所示。

3.2 人行天桥的舒适度分析

异形人行天桥舒适度研究主要包括自振模态分析以及人致振动响应分析。分析模态是为了判断是否有处于竖向或横向振动敏感频率范围内的振型, 分析人致振动响应是为了得到人行桥振动峰值加速度。

3.2.1 人行天桥的自振模态分析

基于 Lanczos 特征值向量进行特征值分析, 振型数量取 100 阶, 确保各阶振型的参与质量总和 \geq

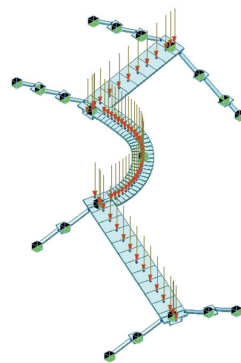


图 7 人行天桥有限元模型

Fig. 7 Pedestrian bridge finite element model

90%^[15]; 得到人行天桥前 10 阶模态的频率及振型特征, 见表 2。人行天桥第 7、9、10 阶振型包含了主梁竖弯振动; 但第 7 阶振型频率为 3.04 Hz , 处于 $1.25 \sim 4.6 \text{ Hz}$ 人群荷载敏感频率范围内, 需要进行竖向人致振动舒适度分析。同时第 7 阶振型为主振型, 竖向振型参与质量为 20.68% 。人行天桥前 10 阶振型横弯振动频率不在 $0.5 \sim 1.2 \text{ Hz}$ 敏感频率范围内, 因此不需要进行横向人致振动舒适度分析。第 7 阶模态的振型如图 8 所示。

表 2 模态频率及振型特征

Table 2 Modal frequency and vibration shape characteristics

阶次	频率 /Hz	振型参与质量 (%)			振型描述
		X	Y	Z	
1	1.44	0	0.18	0	梯道梁横弯
2	1.53	0.08	0.61	0.1	梯道梁横弯+梯道梁竖弯
3	1.59	0.02	0	0.01	梯道梁横弯
4	1.60	0.01	0.04	0.04	梯道梁横弯
5	1.61	0	0.01	0	梯道梁横弯
6	1.64	0.02	0.05	0.3	梯道梁横弯+梯道梁竖弯
7	3.04	0.02	0.02	20.68	梯道梁横弯+主梁竖弯+主梁扭转
8	4.80	36.09	0.91	0.01	梯道梁横弯+主梁横弯
9	5.11	2.84	22.82	0.18	梯道梁横弯+主梁横弯+主梁竖弯
10	5.58	0.06	0.28	15.44	梯道梁横弯+主梁竖弯+主梁扭转

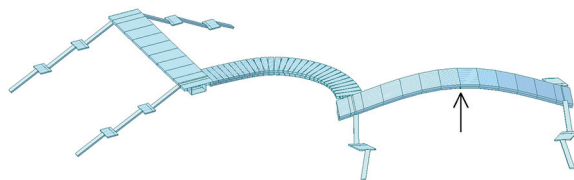


图 8 第 7 阶模态振型图

Fig. 8 7th order mode shape diagram

3.2.2 人行天桥的人致振动响应分析

人行天桥在设计时应考虑不同行人密度的荷载工况。鉴于我国人行天桥一般处于行人密集的地段,

道桥技术

而德国规范^[12]所规定的行人密度较小,因此人群密度取我国《城市人行天桥与人行地道技术规范(征求意见稿)》^[16]所限定的值。将行人密度代入公式(2)得到不同人群荷载工况,见表3。人行天桥作用不同人群荷载工况下模态位移最大点加速度时程曲线如图9所示。

表3 不同人群荷载工况
Table 3 Load conditions for different groups of people

工况	行人密度/ (P/m^2)	人群荷载	交通描述	行走特点
一	0.2	$0.69\cos(19.1t)$	交通十分稀少	行人行走舒适自如,可自由选择步伐
二	0.5	$1.09\cos(19.1t)$	交通正常	行人行走不受限制,但快走时可能会受到限制
三	1.0	$4.16\cos(19.1t)$	交通繁忙	行人在桥上行走受限,无法快步行走
四	1.5	$5.09\cos(19.1t)$	交通十分繁忙	桥上拥挤,不能自由选择步伐,行走不舒适
五	4.6	$8.92\cos(19.1t)$	交通异常繁忙	桥上异常拥挤,难以行走

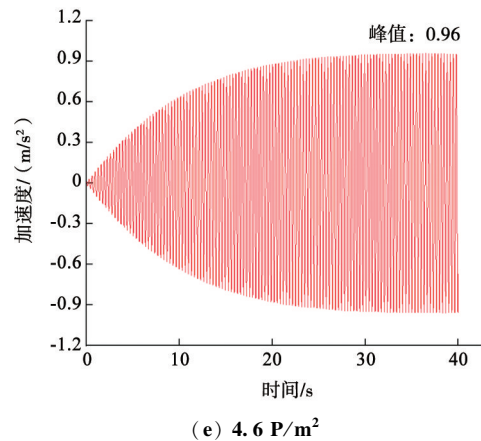
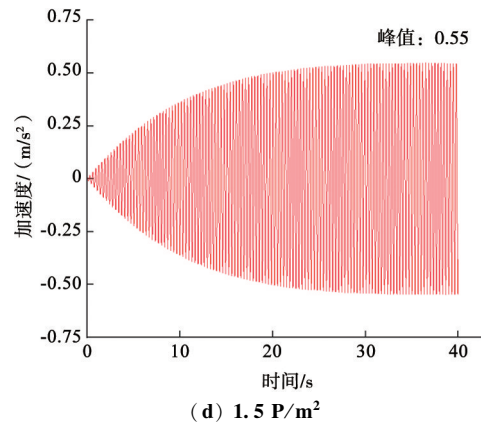
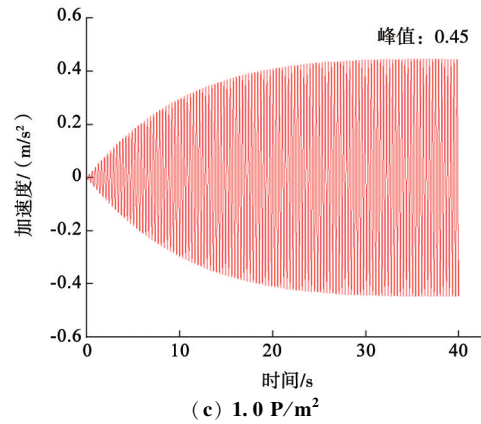
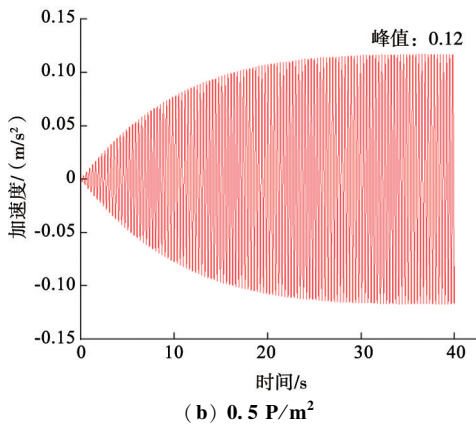
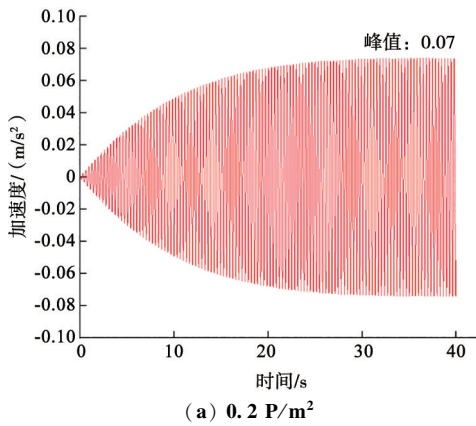


图9 不同工况人行天桥加速度时程曲线
Fig. 9 Acceleration time-history curve of pedestrian bridge under different working conditions

由图可知,当行人密度分别为0.2、0.5、1.0、1.5、4.6 P/m^2 时,人行天桥进入稳定状态后的峰值加速度分别为0.07、0.12、0.45、0.55、0.96 m/s^2 ,对应的舒适度等级为CL1、CL1、CL1、CL2、CL2。由于人行天桥第7阶振型频率为3.04 Hz,处于1.25~4.6 Hz人群荷载敏感频率范围内,桥上行人越多,引起结构振动的峰值加速度越大,因此当行人

密度 $\geq 1.5 \text{ P/m}^2$ 时, 人行天桥舒适度不满足 CL1 等级, 且峰值加速度为 0.96 m/s^2 时接近 CL3 较差的舒适度等级, 此时容易出现人桥共振的现象, 需要对人行天桥进行减振设计。

4 人行天桥的减振方案

4.1 减振方案选择

当行人引起的人行天桥振动加速度响应超过规范限值时, 为满足人行天桥舒适性要求, 可以通过提高结构自振频率以及增加结构阻尼来解决。提高结构自振频率意味着减小结构质量或增大结构刚度, 这在实际工程中往往是无法做到的。因此工程案例采用增加结构阻尼, 即安装调谐质量阻尼器 (TMD) 的方法使人行天桥满足 CL1 舒适度等级。TMD 因具有构造简单、安装方便、价格实惠、后期便于维护、性能较为可靠等诸多优点被广泛应用于各个领域。

4.2 调谐质量阻尼器 (TMD) 设计

TMD 由弹簧、阻尼器和固体质量块等构成。对于单自由度系统, TMD 与主结构振动的力学模型如图 14 所示。

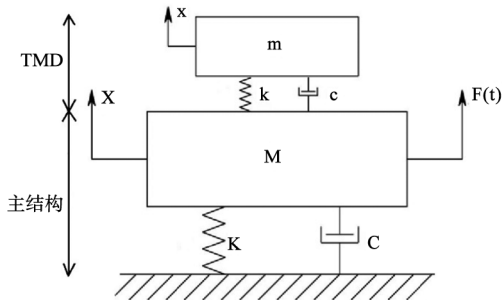


图 10 TMD 与主结构力学模型

Fig. 10 TMD and main structural mechanical model

TMD 通过调整自身的刚度和质量来改变固有频率。当 TMD 与主结构的固有频率相同或相近, 主结构受外荷载作用振动时, TMD 会与主结构发生共振, 然后 TMD 会产生与主结构振动方向相反的惯性力, 惯性力起反作用降低主结构的动力响应。TMD 吸收主结构振动时产生的能量并通过阻尼器耗散, 可以提高结构振动舒适性并减缓结构疲劳损伤。设计 TMD 时关键在于确定其刚度、阻尼以及质量, 结构良好的减振效果取决于恰当的 TMD 参数。文献 [17] 给出了无阻尼主结构受简谐荷载激励时 TMD 参数优化方法, 表示如下:

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (4)$$

$$\xi_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)^3}} \quad (5)$$

式中: μ 为 TMD 质量与主结构质量比, 实际工程中一般取 $1\% \sim 5\%$; α_{opt} 为最优频率比; ξ_{opt} 为最优阻尼比。

现拟定 TMD 质量与主结构质量比 μ 为 1% , 通过式 (4) 和式 (5) 计算得到最优频率比和最优阻尼比分别为 0.99 和 0.06 , 此时 TMD 参数见表 4。其中 TMD 安装在敏感频率范围内振型的振幅最大位置处, 安装位置如图 11 所示。

表 4 TMD 参数
Table 4 TMD parameters

质量/kg	频率/rad	刚度/(N/m)	阻尼/(N·s/m)
1 206.7	19.08	430 552.8	2 735.2

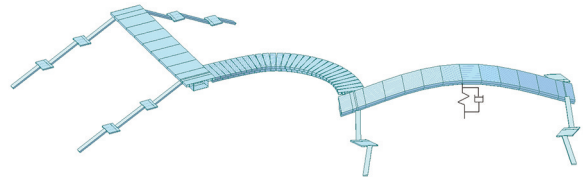
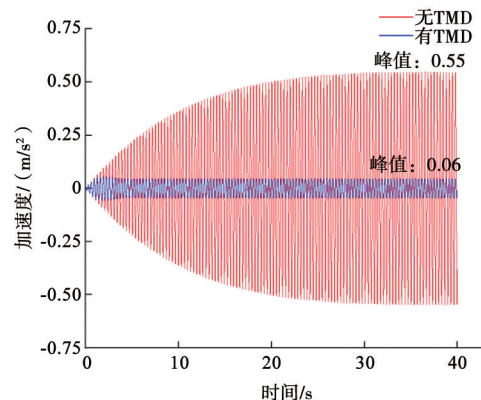


图 11 TMD 安装位置

Fig. 11 TMD installation location

4.3 减振效果分析

基于上述 TMD 参数, 重新验算人行天桥在 1.5 和 4.6 P/m^2 人群荷载作用下的加速度响应。计算结果表明, 在振幅最大位置处安装 TMD 之后, 对应的峰值加速度降为 0.06 和 0.10 m/s^2 , 减振率为 89.1% 和 89.6% 。人行天桥在有无 TMD 两种情况下的人致振动加速度时程曲线如图 12 所示。



(a) 1.5 P/m^2

道桥技术

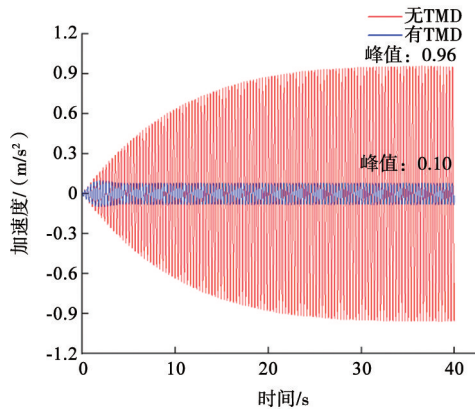
(b) 4.6 P/m²

图 12 TMD 减振效果分析

Fig. 12 Analysis of TMD vibration reduction effect

5 结论

本文基于数值模拟的方法,对异形人行天桥进行人致振动舒适度分析,得出以下结论:

(1) 基于动力特性分析,跨径布置为 35.85 m+2×17.85 m+24.57 m 的异形连续钢箱梁人行天桥有 1 阶竖弯振型的频率在人致振动敏感频率范围内,需要进行人致振动舒适度验算。

(2) 在极端人群荷载工况下该异形人行天桥峰值加速度为 0.96 m/s²,接近 CL3 较差的舒适度等级,此时容易出现人桥共振的现象。

(3) 为了使异形人行天桥在极端人群荷载工况下舒适度能满足 EN03 规范中 CL1 舒适度等级,在振幅最大位置处安装 TMD 后,峰值加速度由 0.55 和 0.96 降为 0.06 和 0.10 m/s²,减振率为 89.1% 和 89.6%,减振效果显著。

参 考 文 献

- [1] DALLARD P, FITZPATRICK A J, FLINT A, et al. The London Millennium footbridge [J]. The Structural Engineer, 2001, 79 (22): 17-33.
- [2] NAKAMAURA K. Lateral vibration of footbridge by synchronised walking [J]. Journal of Constructional Steel Research, 2006, 62: 1148-1160.
- [3] 袁旭斌. 人行桥人致振动特性研究 [D]. 上海: 同济大学, 2006.
- [4] 陈政清, 刘光栋. 人行桥的人致振动理论与动力设计 [J]. 工程力学, 2009, 26 (增刊 2): 148-159.
- [5] 法永生, 李东, 孙翠华. 人行桥随机人行荷载下的振动分析及其舒适度评价的新方法 [J]. 振动与冲击, 2008 (1): 119-123, 188.
- [6] 何勇, 金伟良, 宋志刚. 多跨人行桥振动均方根加速度响应谱法 [J]. 浙江大学学报 (工学版), 2008 (1): 48-53.
- [7] 党振宇, 陈璞. 人行桥振动舒适度评价的频域方法 [J]. 科学技术与工程, 2009, 9 (14): 4074-4079.
- [8] 李晓玮, 何斌, 施卫星. TMD 减振系统在人行桥结构中的应用 [J]. 土木工程学报, 2013, 46 (增刊 1): 245-250.
- [9] 城市人行天桥与人行地道技术规范, CJJ 69—1995 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1996.
- [10] BACHMANN H, PRETLOVE A J, RAINER JH. Dynamic forces from rhythmical human body motions [EB/OL]. Berlin: Birkhauser Verlag AG, 1995.
- [11] RAINER J H, PERNICA G, ALLEN D E. Dynamic loading and response of footbridges [J]. Canadian Journal of Civil Engineering, 1988, 15 (1): 66-71.
- [12] HIVOSS (Human - Induced Vibration of Steel Structures). EN03 (2007) Design of Footbridges Guideline [S]. Germany: Research Found for Coal & Steel, 2008.
- [13] 公路桥涵设计通用规范, JTG D60—2015 [S]. 北京: 人民交通出版社, 2015.
- [14] 陈政清, 华旭刚. 人行桥的振动与动力设计 [M]. 北京: 人民交通出版社, 2009.
- [15] 公路桥梁抗震设计细则, JTG/T B02—01—2008 [S]. 北京: 人民交通出版社, 2008.
- [16] 城市人行天桥与人行地道技术规范 (征求意见稿), CJJ 69—201X [S].
- [17] DEN-HARTOG J P. Mechanical Vibrations [M]. U. S. A.: McGraw Hill, 1956.