

煤矿充填开采下顶板沉降研究*

Study on Roof Subsidence of Filling Mining in Coal Mine

高雁宁, 王晓磊, 刘历波, 韩现刚

(河北工程大学 土木工程学院, 河北 邯郸 056038)

摘要: 充填采矿可以有效控制岩层移动、抑制地表沉陷、减轻地质灾害, 并且能够处理或利用一定的固体废弃物, 有效改善矿山上覆岩层的力学环境, 减轻顶板压力。以平凉某煤矿为工程背景, 研究煤矿充填开采条件下坚硬顶板沉降变形情况, 构建了顶板力学模型, 对于初期来压采用四边固支的边界条件, 利用变分法中伽辽金变形方程求选用不同挠度表达式的解; 另对周期来压选用三边固支一边自由的边界条件, 采用变分法中里兹变形方程进行求解, 得出充填后顶板挠度显著减小, 初期来压时减小 38.74%, 周期来压时减小 66.84%。并得到充填开采顶板沉降变形规律, 随着充填体弹性模量 k 值增大, 顶板下沉位移显著减小。

关键词: 顶板力学模型; 矩形弹性薄板; 充填开采; 顶板沉降; 变分法

中图分类号: TD31 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-8249 (2024) 02-0045-06

DOI: 10.19860/j.cnki.issn1005-8249.2024.02.009

GAO Yanning, WANG Xiaolei, LIU Libo, HAN Xiangang

(College of Civil Engineering, Hebei University of Engineering, Handan 056038, China)

Abstract: Filling mining has the effect of controlling the movement of rock layers, curbing surface subsidence, and reducing geological disasters, while it can effectively use part of the solid waste, improve the mechanical environment of rock strata and reduce roof pressure. Taking a coal mine in Pingliang as the engineering background and aiming at the settlement deformation of the hard roof under the coal mine filling mining, the mechanical model of roof plate is constructed for the settlement and deformation of hard roof under the filling mining of coal mine. For the boundary condition of the four-sided solid branch of the initial pressure, the solution of different deflection expressions is selected by using the Galiagin deformation equation in the variational method; In addition, the boundary conditions of three clamped edges and one free edge are used for periodic weighting, and the Ritz deformation equation in the deformation method is used for solving. It is concluded that the roof deflection after filling is significantly reduced, the initial weighting is reduced by 38.74%, and the periodic weighting is reduced by 66.84%. At the same time, the sedimentation deformation law of the top plate under the filling and mining can be obtained, and the sinking displacement of the roof plate is significantly reduced as the elastic modulus k value of the filling body increases.

Keywords: roof mechanics model; rectangular elastic thin plate; filling mining; roof settlement; variation method

* 基金项目: 国家重点实验室开放基金项目 (SKLMRDPC19KF04)。

作者简介: 高雁宁 (1996—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 顶板沉降、煤矿充填方面研究。

通信作者: 王晓磊 (1983—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向: 地基基础方面研究。

收稿日期: 2023-07-07

岩土力学

0 引言

煤炭是我国最重要的能源保障之一，其占比一直在 50% 以上。煤炭大规模、粗放式的开采方式也带来了诸如地表沉陷与诱发地质灾害等一系列问题。充填采煤具有减少采动损害和地质灾害的作用，可以有效控制岩层移动、抑制地表沉陷、保护矿区生态环境和地下水资源的作用，并且能够有效地利用部分固体废弃物，进而改善矿山地质条件及力学环境。

煤矿地下开采过程中引起的采空区上层覆岩和坚硬顶板抗压承载能力的破坏，长期以来备受社会各界广泛关注。前人做了较多研究，王金安等^[1]研究了采空区顶板岩层的变形问题，得到了顶板下沉位移与时间成正比的结论。针对四边固支顶板力学模型的弯曲问题，孟阳君^[2]采用迭加法求出四边固支矩形薄板在受到均布荷载作用下的解析解，并用 Midas 软件证明了理论分析结果的准确性；钟阳等^[3]将矩形薄板的基本方程转换到哈密顿体系中，采用辛几何法求出四边固支矩形薄板的解析解；Seyedemad 等^[4]提出一种求解混合或完全固支边界条件下矩形薄板的自由振动精确解的数学方法，研究了 Winkler 地基模型以及部分支撑情况下的自由振动问题。此外还有一些学者^[5-7]对上述问题进行了详细研究。针对三边固支一边自由顶板力学模型，陈英杰等^[8]应用混合变量最小作用量原理求解了矩形板的受迫振动问题；程选生等^[9]利用薄板小挠度弯曲和叠加原理得到矩形薄板在温度作用下的挠度函数；He 等^[10]得到了各向异性板弯曲问题的积分变换解，通过数值算例、已有文献以及 ABAQUS 得到的有限元解进行对比，证明了该解的准确性和收敛性。此外还有一些学者^[11-12]对不同的边界条件下矩形薄板自由振动弯曲问题进行了概括分析，得到了高精度封闭解。

针对变分法中传统伽辽金和里兹等基础理论，考虑充填体对坚硬顶板的影响，提出了文克尔地基上伽辽金和里兹变形方程，分别建立了边界条件为四边固支和三边固支一边自由矩形弹性薄板的力学模型。选取不同的挠度表达式，对伽辽金变形方程，进行对比验证。绘制相关图像对比充填前后坚硬顶板的挠度，分析坚硬顶板下沉位移变化情况。

1 坚硬顶板变形及受力特性研究

采空区充填后剖面如图 1 所示，将坚硬顶板简化为矩形弹性薄板。将充填体假定为文克尔地基模型，实际上就是把地基看成一个个互不干扰竖向排布的弹簧。对于初期来压采用四边固支的边界条件，利用变分法中伽辽金变形方程，建立顶板力学模型，求不同挠度表达式的解。另对周期来压选用三边固支一边自由的边界条件，采用变形法中里兹变形方程，建立顶板力学模型进行求解。

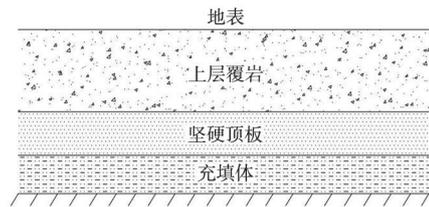


图 1 采空区充填后剖面图
Fig. 1 Sectional view of goaf after filling

1.1 四边固支矩形弹性薄板

将坚硬顶板简化为四边固支矩形弹性薄板，如图 2 所示。选取不同的挠度表达式，构建四边固支顶板力学模型。其中，矩形弹性薄板长度为 $2a$ ($2a = c$)、初期来压为 $2b$ ($b \leq a$)、厚度为 h_0 、弹性模量为 E 、泊松比为 μ ，上层覆岩的厚度为 h 、容重为 γ ，充填体的弹性模量为 k ，来自地表的均布载荷为 q_0 。

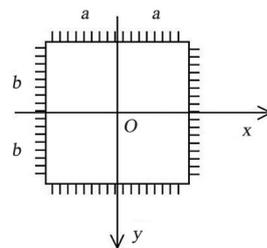


图 2 坚硬顶板简化为四边固支矩形弹性薄板
Fig. 2 The hard roof simplified as a rectangular elastic thin plate fixed on four sides

根据弹性基础上的平板弯曲理论^[13]，顶板下沉挠度 w 满足

$$D \nabla^4 w + kw = q \tag{1}$$

式中： D 为板的抗弯刚度， $D = Eh_0^3/[12(1 - \mu^2)]$ 。

作用在顶板上总的均布载荷 q 由 q_0 与上层覆岩自重载荷 γh 叠加而成，即 $q = q_0 + \gamma h$ 。

薄板的边界条件为：

$$\begin{aligned} w|_{x=za} = 0, w|_{y=zb} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=za} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=zb} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

根据坚硬顶板的边界约束条件, 近似假设挠度表达为:

$$w_1 = C_1 w_m = C_1 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \quad (3)$$

式中: C_1 为坚硬顶板的挠度系数。

将其带入式 (1) 的伽辽金变形方程:

$$\iint D(\nabla^4 w_1) w_m dx dy + \iint k w_1 w_m dx dy = \iint q w_m dx dy \quad (4)$$

可得系数 C_1 为:

$$C_1 = \frac{4qa^4b^4}{\pi^4 D(3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4) + 9a^4b^4k} \quad (5)$$

于是, 可得顶板下沉挠度的表达式为:

$$w_1 = \frac{4qa^4b^4}{\pi^4 D(3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4) + 9a^4b^4k} \times \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

将挠度表达式 w_1 代入四边固支矩形弹性薄板内力及应力的表达式, 可得:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{C_1 EZ}{1 - \mu^2} \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} + \mu \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} \right] \\ \sigma_y = \frac{C_1 EZ}{1 - \mu^2} \left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} + \mu \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \right] \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\pi^2 C_1 EZ}{ab(1 + \mu)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \\ M_x = C_1 D \left[\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} + \mu \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} \right] \\ M_y = C_1 D \left[\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{b} + \mu \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi y}{b}\right) \cos \frac{\pi x}{a} \right] \\ M_{xy} = M_{yx} = -\frac{\pi^2 C_1 D(1 - \mu)}{ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad (8)$$

根据同样的边界约束条件, 另一个近似假设挠度表达式为:

$$w_2 = C_2 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) \quad (9)$$

同理可得挠度系数 C_2 为:

$$C_2 = \frac{16qa^4b^4}{\pi^4 D(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2) + 9a^4b^4k} \quad (10)$$

于是, 将式 (10) 代入式 (9) 可得顶板下沉挠度的表达式:

$$w_2 = \frac{16qa^4b^4}{\pi^4 D(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2) + 9a^4b^4k} \times \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) \quad (11)$$

因此可得:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\pi^2 C_2 EZ}{2(1 - \mu^2)} \left[\frac{1}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) \right] \\ \sigma_y = \frac{\pi^2 C_2 EZ}{2(1 - \mu^2)} \left[\frac{1}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{\mu}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) \right] \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{\pi^2 C_2 EZ}{4ab(1 + \mu)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} M_x = \frac{\pi^2 C_2 D}{2} \left[\frac{1}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) + \frac{\mu}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) \right] \\ M_y = \frac{\pi^2 C_2 D}{2} \left[\frac{1}{b^2} \cos \frac{\pi y}{b} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{2a}\right) + \frac{\mu}{a^2} \cos \frac{\pi x}{a} \cos^2 \left(\frac{\pi y}{2b}\right) \right] \\ M_{xy} = M_{yx} = -\frac{\pi^2 C_2 D(1 - \mu)}{4ab} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \end{cases} \quad (13)$$

1.2 三边固支一边自由矩形弹性薄板

如图 3 所示。构建三边固支一边自由顶板力学模型, 以薄板左下角为中心原点, 建立直角坐标系 oxy , 其中矩形弹性薄板长度为 c 、周期来压为 d ($d \leq c$), 其余参数与上节相同。

薄板的边界条件为:

$$\begin{aligned} w|_{x=0, c} = 0, w|_{y=0} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0, c} = 0, \frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

根据坚硬顶板的边界约束条件, 近似假设挠度

岩土力学

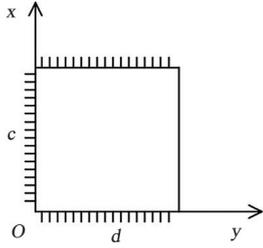


图3 坚硬顶板简化为三边固支一边自由矩形弹性薄板
Fig. 3 The hard roof is simplified as a rectangular elastic thin plate with three fixed supports and one free side

表达式的形式具体如下:

$$w_3 = C_3 w_n = C_3 \left(\frac{y}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{c} \right) \quad (15)$$

式中: C_3 为坚硬顶板的挠度系数。

则有:

$$\iint_A (q - kw_3) w_n dx dy = \frac{qcd}{6} - \frac{3kC_3cd}{40} \quad (16)$$

将式(15)带入薄板的应变能表达式:

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \frac{1}{2} \times \iint_A D \left\{ \left[(\nabla^2 w_3)^2 - 2(1-\mu) \times \left[\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right] \right\} dx dy \\ &= \frac{D}{2} \left[\frac{2C_3^2 d \pi^4}{5c^3} + \frac{3C_3^2 c}{2d^3} + \frac{2C_3^2 (2-3\mu) \pi^2}{3cd} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

式中: A 为矩形弹性薄板面积, m^2 。

对式(17)求 C_3 的一阶偏导, 可得:

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_3} = \frac{D}{2} \left[\frac{4C_3 d \pi^4}{5c^3} + \frac{3C_3 c}{d^3} + \frac{4C_3 (2-3\mu) \pi^2}{3cd} \right] \quad (18)$$

根据最小势能原理

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial C_3} = \iint_A (q - kw_3) w_n dx dy \quad (19)$$

将式(16)和式(18)代入式(19)可得:

$$C_3 = 20qc^4 d^4 \div \left\{ 4D \left[\frac{20(2-3\mu)c^2 d^2 \pi^2}{+ 12d^4 \pi^4 + 45c^4} \right] + 9k c^4 d^4 \right\} \quad (20)$$

将式(18)代入式(15)中, 可得下沉挠度为:

$$\begin{aligned} w_3 = C_3 w_n &= 20qc^4 d^4 \left(\frac{y}{d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi x}{c} \right) \div \\ &\left\{ 4D \left[\frac{20(2-3\mu)c^2 d^2 \pi^2}{+ 12d^4 \pi^4 + 45c^4} \right] + 9kc^4 d^4 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

将挠度表达式 w_3 代入三边固支一边自由矩形弹性薄板内力及应力的表达式, 可得:

$$\begin{cases} \sigma_x = -\frac{C_3 E Z}{1-\mu^2} \left[\frac{2\pi^2 y^2}{c^2 d^2} \cos \frac{2\pi x}{c} + \frac{2\mu}{d^2} \sin^2 \frac{\pi x}{c} \right] \\ \sigma_y = -\frac{C_3 E Z}{1-\mu^2} \left[\frac{2}{d^2} \sin^2 \frac{\pi x}{c} + \frac{2\mu \pi^2 y^2}{c^2 d^2} \cos \frac{2\pi x}{c} \right] \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\frac{2\pi C_3 E Z}{cd^2(1+\mu)} y \sin \frac{2\pi x}{c} \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} M_x = -C_3 D \left[\frac{2\pi^2 y^2}{c^2 d^2} \cos \frac{2\pi x}{c} + \frac{2\mu}{d^2} \sin^2 \frac{\pi x}{c} \right] \\ M_y = -C_3 D \left[\frac{2}{d^2} \sin^2 \frac{\pi x}{c} + \frac{2\mu \pi^2 y^2}{c^2 d^2} \cos \frac{2\pi x}{c} \right] \\ M_{xy} = M_{yx} = -\frac{2\pi C_3 D (1-\mu)}{cd^2} y \sin \frac{2\pi x}{c} \end{cases} \quad (23)$$

2 工程数值验证

甘肃省平凉某煤矿, 井田中部偏高, 海拔为1400~1650 m, 相对高差100~200 m。其中八采区走向长2.5 km, 倾斜宽约1.0 km, 平面面积约2.5 km²。井田内存在F2和F3两条主要断层, 这两条断层均为逆断层, 其中F2逆断层断距28~43 m, 延展长度约600 m; F3逆断层西盘上升, 东盘下降, 延伸长度约10 km, 均被第三系、第四系地层覆盖。八采区首采工作面长度为200 m, 初期来压140 m, 周期来压120 m, 煤层埋深500 m, 煤层厚6~8 m, 开采方式为综放开采, 上层覆岩为砂岩。考虑充填体对顶板挠度的影响, 建立八采区首采工作面边界条件为四边固支和三边固支一边自由的顶板力学模型。工程参数见表1。

表1 充填开采下现场参数
Table 1 Field parameters under filling mining

名称	参数	量值
坚硬顶板	长度 $2a/m$	200
	初期来压 $2b/m$	140
	周期来压 d/m	120
	厚度 h_0/m	18.9
	弹性模量 $E/(kN/m^2)$	4.13×10^7
上层覆岩	泊松比 μ	0.13
	厚度 h/m	500
充填体	容重 $\gamma/(kN/m^3)$	25
	弹性模量 $k/(kN/m^2)$	3.175×10^4
地表	均布载荷 q_0/N	0

注: 充填体(胶结)的弹性模量由现场检测初步测定。

2.1 四边固支沉降分析

图4为四边固支充填前后顶板变形图(式6、式

11)。从图 4 可以看出，选取的两种表达式所求得顶板变形图完全一致。另外从图 4a 中可以看出充填前即 $k=0$ 时中心原点处挠度达到最大，最大值为 0.444 m ；从图 4b 中可以看出充填后即 $k=3.175 \times 10^7\text{ N/m}^2$ 时，中心原点处挠度达到最大，最大值为 0.272 m 。因此，充填前后顶板挠度存在显著差异，充填后挠度减少了 38.74% 。

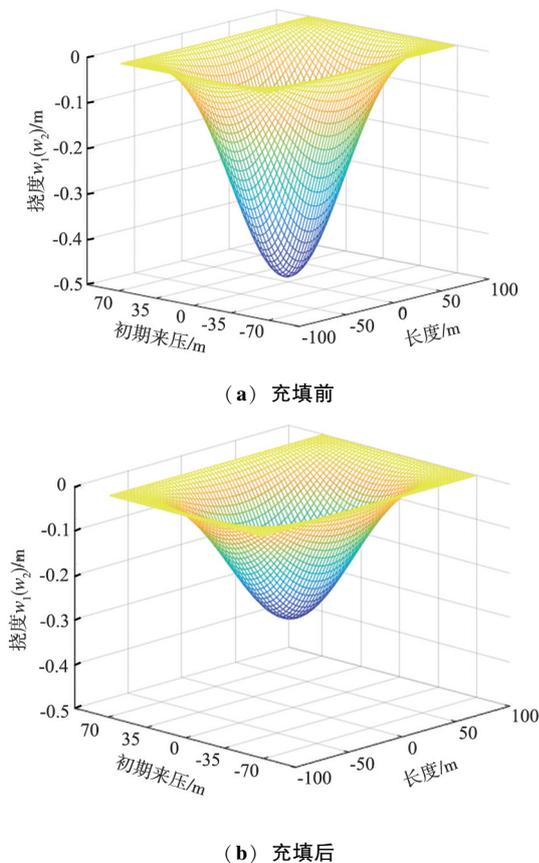


图 4 四边固支充填前后顶板变形图
Fig. 4 Roof deformation before and after four side fixed support filling

选取充填体不同 k 值，绘制薄板上 $y=0\text{ m}$ 截面处 x 方向的挠度图（如图 5 所示），从图中可以看出随着充填体弹性模量 k 值的增大，坚硬顶板中心处挠度显著减小。

2.2 三边固支一边自由沉降分析

图 6 为三边固支一边自由充填前后顶板变形图（式 22）。从图 6a 中可以看出充填前即 $k=0$ 时自由边中点处挠度达到最大，最大值为 1.764 m ；从图 6b 中可以看出充填后即 $k=3.175 \times 10^7\text{ N/m}^2$ 时自由边中点处挠度达到最大，最大值为 0.585 m 。因此，充填前后顶板挠度存在显著差异，充填后挠度减少了 66.84% 。

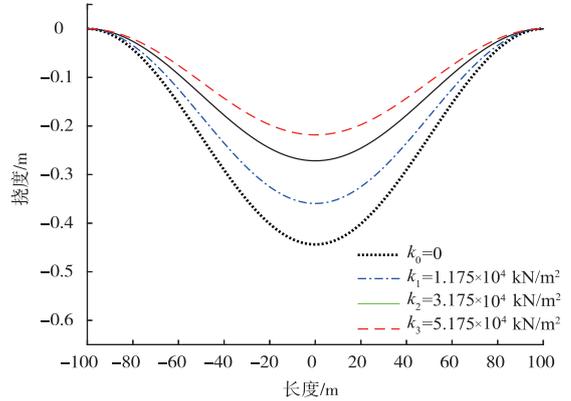


图 5 不同 k 值下四边固支坚硬顶板的挠度图
Fig. 5 Deflection diagram of rigid roof slab fixed on four sides under different k values

选取充填体不同 k 值，绘制薄板上 $y=120\text{ m}$ 截面处 x 方向的挠度图（如图 7），从图中可以看出随着填充体弹性模量 k 值的增大，坚硬顶板自由边中点处挠度显著减小。

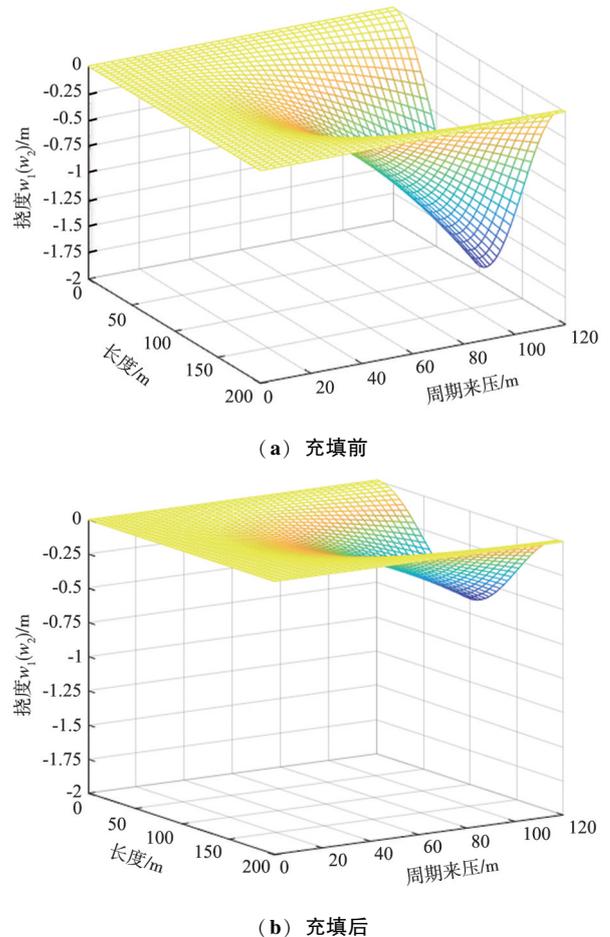


图 6 三边固支一边自由充填前后顶板变形图
Fig. 6 Deformation of roof before and after three side fixed support and free filling

岩土力学

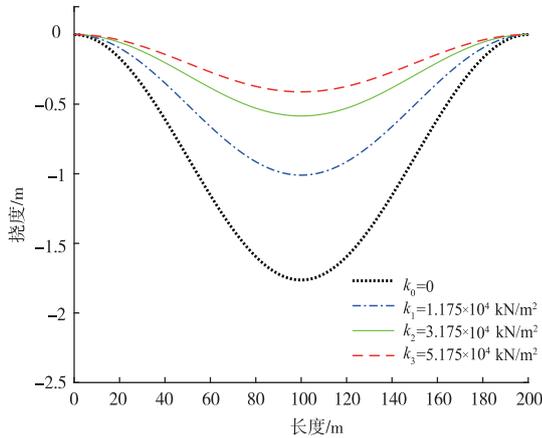


图7 不同 k 值下三边固支一边自由坚硬顶板的挠度图
Fig. 7 Deflection diagram of three side fixed support and one side free hard roof under different k values

3 结论

(1) 建立文克尔地基上四边固支矩形弹性薄板的伽辽金变形方程,初步选取不同的挠度表达式代入变形方程求得坚硬顶板的挠度解析解,将矿山实验数据代入解析解后所绘制的相关图像大小一致,证实方程计算吻合,结果可靠。

(2) 结合顶板力学模型,阐明两种边界条件下矩形弹性薄板的变形特征,其中四边固支坚硬顶板在板中心处位移最大,三边固支一边自由坚硬顶板在板自由边中点处位移最大。代入矿山实验数据,验证了充填后顶板挠度变化显著减小,初期来压时减小38.74%,周期来压时减小66.84%。

(3) 通过绘制两种边界条件下不同 k 值对坚硬顶板挠度的影响曲线,得到了充填开采下顶板沉降变形规律,随着充填体弹性模量 k 值的增大,顶板下沉位移逐渐减小。

参 考 文 献

[1] 王金安,李大钟,尚新春.采空区坚硬顶板流变破坏断力学分析[J].北京科技大学学报,2011,33(2):142-148.

- [2] 孟阳君.不同边界条件矩形薄板受力分析的解析解法[J].湖南交通科技,2021,47(4):92-98.
- [3] 钟阳,李锐,刘月梅.四边固支矩形弹性薄板的精确解析解[J].力学季刊,2009,30(2):297-303.
- [4] SEYEDMAD M, MASSOOD M, JOHN EA. On the free vibration response of rectangular plates, partially supported on elastic foundation [J]. Applied Mathematical Modelling, 2012, 36(9): 4473-4482.
- [5] 李元媛,蔡睿贤.矩形薄板弯曲的严格简明解析解[J].机械工程学报,2008(10):72-76.
- [6] 陆锁芳,刘俊,陈伟杰.局部载荷作用下四边固支矩形板弹性解答及其应用[J].舰船科学技术,2019,41(13):40-44.
- [7] 李善倾,袁鸿.Winkler地基上固支薄板自由振动问题的准Green函数方法[J].应用数学和力学,2011,32(3):253-262.
- [8] 陈英杰,程剑锋,陈杰,等.集中谐波力作用下三边固定一边自由板的受迫振动[J].动力学与控制学报,2005(3):47-51.
- [9] 程选生,杜修力.三边固支一边自由混凝土矩形薄板的热弯曲[J].工程力学,2013,30(4):97-106.
- [10] HE Y Y, AN C, SU J. Bending of orthotropic rectangular thin plates with two opposite edges clamped [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2020, 234(6): 1220-1230.
- [11] XING Y F, SUN Q Z, LIU B, et al. The overall assessment of closed-form solution methods for free vibrations of rectangular thin plates [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2018, 140: 455-470.
- [12] EISENBERGER M, DEUTSCH A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions [J]. Journal of Sound and Vibration, 2019, 452: 1-12.
- [13] 徐芝纶.弹性力学下册(第5版)[M].北京:高等教育出版社,2016:3-6.